Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
«Армавирский лингвистический социальный институт»

Гуманитарно-экономический факультет
Кафедра Экономических, естественнонаучных и социальных дисциплин

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.Б.05 «Высшая математика»

Уровень **бакалавриат**
Направление подготовки **38.03.01 Экономика**
Профиль образовательной программы: **«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»**
Форма обучения **очная, заочная**

Армавир, 2022

Содержание

1. Цели освоения учебной дисциплины ... 4
2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы ... 4
3. Указание места дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы ... 5
4. Объем дисциплины ... 5
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и видов учебных занятий ... 6
5.1. Структура учебной дисциплины ... 6
5.2. Виды занятий и их содержание ... 6
5.2.1. Содержание теоретической части дисциплины (модуля) ... 6
5.2.2. Примерная тематика практических занятий ... 8
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине: ... 46
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине ... 47
7.1. Паспорт фонда оценочных средств ... 47
7.2. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы ... 47
7.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, а также шкал оценивания ... 48
7.3.1. Перечень оценочных средств сформированности компетенций ... 48
7.3.2. Уровневая шкала показателей сформированности компетенций ... 48
7.4. Типовые задания и иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы ... 53
7.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций ... 61
7.5.1. Сводный перечень обобщенных критериев оценки разных форм контроля ... 61
7.5.2. Средства оценивания для промежуточной и текущей аттестации ... 63
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины ... 65
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины ... 65
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины ... 65
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине ... 65
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине ... 66

Обоснование РПД

Рабочая программа по дисциплине Б1.Б.05 «Высшая математика» разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО

- Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата)". Утвержденный приказом Министерства образования и науки РФ от 07 августа 2014 г. N 940;

- учебным планом по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, направленность (профиль) образовательной программы «Бухгалтерский учет, анализ и аудит.

Для обучающихся набора:
2018 года;
2019 года;

Автор (составитель): к.п.н., доцент К.А. Чулюкина

Рабочая программа по дисциплине утверждена на заседании кафедры экономических, естественнонаучных и социальных дисциплин «17» июня 2022 г. протокол № 7

Заведующий кафедрой: Денисова Л.Л.

Рецензент: доцент кафедры экономики и управления ФГБОУ ВО АГПУ М.И. Пшмахова

1. Цели освоения учебной дисциплины

Целью курса «Высшая математика» является - формирование математических знаний, умений и навыков, способствующих развитию творческого и логического мышления, интуиции и математической культуры личности, а также воспитание достаточно высокой математической культуры, являющейся основой для овладения других математических дисциплин данного направления подготовки.

Задачи освоения учебной дисциплины:
- познакомится с предметом дисциплины, основными ее разделами;
- научиться методам решения математических задач;
- научиться выбору метода решения конкретной математической задачи;
- познакомиться с прикладными задачами, решаемыми математическими методами;
- знать основные понятия дисциплины;
- научится решать математические задачи;
- научится математическим методам решения прикладных задач.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций (в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП):

В результате освоения дисциплины «Высшая математика» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

а) общекультурными (ОК)
- способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);

б) общепрофессиональные компетенции (ОПК)
- сспособностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ОПК-3)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать:
- основные понятия и утверждения аналитической геометрии, векторной и линейной алгебры;
- основные понятия и утверждения теории пределов функции одной и функции нескольких переменных;
- основные понятия и утверждения дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных;
- основные понятия и утверждения теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
- основные понятия и утверждения теории числовых и функциональных рядов;
- основные понятия и утверждения комбинаторики;
- основные понятия и утверждения теории вероятностей.

уметь:
- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- аналитически описывать геометрические объекты при решении задач;
- решать задачи с применением дифференциального исчисления;
- решать задачи с применением интегрального исчисления;
- решать экстремальные задачи для функций одной и нескольких переменных;
- решать задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям и системам дифференциальных уравнений;
- использовать вероятностные методы решения задач.

владеть:
- основными методами аналитического решения геометрических задач;
- основными методами дифференцирования;
- основными методами интегрирования функций;
- основными методами поиска экстремума функций одной и нескольких переменных;
- основными аналитическими методами решения алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений;
- основными аналитическими методами решения дифференциальных уравнений и их систем;
- основными методами построения вероятностных моделей прикладных задач менеджмента.

3. Указание места дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к базовой части образовательной программы по данному направлению подготовки и является обязательной вне зависимости от направленности образовательной программы, обеспечивает формирование у обучающихся компетенций, установленных образовательным стандартом.

Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единицы, 180 часов.

4. Объем дисциплины

Выписка из учебного плана

Форма обуч.	Семестр	Трудоемкость		Лекции, *час.*	Лабор., час	Практич., *час.*	СРС, *час*	Форма аттестации
		зач. ед.	час					
Очная	1	5	180	24	–	48	72	36 экзамен
Заочная	2	5	180	6	–	12	153	9 экзамен
В том числе интерактивной форме 20%								

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и видов учебных занятий

5.1. Структура учебной дисциплины

Тематический план по дисциплине
для ОЧНОЙ формы обучения

№ п/п	Разделы курса, темы занятий	Всего часов	Всего аудит.	Из них			СРС
				лекции	лаб.	практ.	
1.	*Элементы аналитической геометрии	36	18	6		12	18
2.	*Элементы линейной алгебры	36	18	6		12	18
3.	Основы математического анализа	36	18	6		12	18
4.	Теория вероятностей и элементы математической статистики	36	18	6		12	18
	экзамен	**36**	–	–	–	–	**36**
	Всего часов:	**180**	**72**	**24**		**48**	**108**

Тематический план по дисциплине
для ЗАОЧНОЙ формы обучения

№ п/п	Разделы курса, темы занятий	Всего часов	Всего аудит.	Из них			СРС
				лекции	лаб.	практ.	
1.	*Элементы аналитической геометрии	85	9	3		6	76
2.	*Элементы линейной алгебры						
3.	Основы математического анализа	86	9	3		6	77
4.	Теория вероятностей и элементы математической статистики						
	экзамен	9	–	–	–	–	9
	Всего часов:	**180**	**18**	**6**		**12**	**162**

* занятия проводятся в интерактивной форме обучения

5.2. Виды занятий и их содержание

5.2.1. Содержание теоретической части дисциплины (модуля)

Элементы аналитической геометрии

Векторы в n-мерном пространстве. Координаты вектора, модуль вектора, операции над векторами и их свойства (сумма, разность, умножение на число, скалярное произведение, векторное произведение в трехмерном пространстве). Понятие векторного пространства. Понятие о линейно независимых и линейно зависимых векторах, базисе и ранге системы векторов, размерности векторного пространства. Понятие о разложении вектора по векторам базиса. Уравнение прямой на плоскости, различные формы записи. Уравнения прямой и плоскости в пространстве, различные формы записи. Понятие аффинного пространства. Понятие о кривых и поверхностях второго порядка.

Элементы линейной алгебры

Определение комплексного числа. Различные формы записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Свойства комплексных чисел. Операции над комплексными числами. Понятие матрицы, виды матриц, операции над матрицами и их основные свойства (сумма, разность, транспонирование, умножение на число, умножение матриц). Определители и их основные свойства. Алгебраические дополнения, миноры. Обратная матрица и ее вычисление. Понятие о ранге матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц. Запись системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме. Понятие об основной и расширенной матрице системы. Метод обратной матрицы, формулы Крамера, алгоритм Гаусса.

Основы математического анализа

Введение в математический анализ

Вещественные числа и их свойства. Последовательность и ее предел. Функции и их свойства. Предел функции. Непрерывность функции. Понятие о точках разрыва. Элементарные функции.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производная и ее геометрический смысл. Основные правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функции. Таблица производных. Производные высших порядков. Понятие дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисление. Понятие экстремума, понятие выпуклости и вогнутости. Достаточные условия возрастания, убывания, существования экстремума, выпуклости и вогнутости. Асимптоты к графику функции. Применение производной к исследованию функций.

Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. интегральное исчисление функций одной переменной Свойства неопределенного интеграла. Таблица первообразных основных элементарных функций. Методы интегрирования (интегрирование по частям, метод замены переменной, интегрирование простейших рациональных дробей, интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических функций). Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические приложения определенного интеграла. Понятие о несобственных интегралах.

Ряды

Числовые ряды: определение, сходимость, свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости числовых рядов (положительных, знакопеременных). Степенные ряды: определение, радиус и интервал сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Понятие функции многих переменных, примеры. Предел и непрерывность функции многих переменных. Частные производные первого и второго порядков. Понятие о гармонических функциях. Производная по направлению, градиент. Экстремумы функции многих переменных. Определение, необходимое и достаточное условия существования. Условные экстремумы. Понятие о методе множителей Лагранжа. 8 Дифференциальные уравнения Понятия дифференциального уравнения, общего и частного решения, интегральной кривой, начальных условий. Классификация дифференциальных уравнений, интегрируемых в элементарных функциях. Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод разделения переменных. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: определение, свойства решений, способы интегрирования. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: определение, свойства решений, способы интегрирования.

Теория вероятностей и элементы математической статистики

Теория вероятностей

Элементы комбинаторики. Правила сложения и умножения. Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Операции над событиями. Алгебра событий. Классическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Аксиоматический подход в теории вероятностей. Свойства вероятности. расширенная теорема сложения вероятностей. Условные вероятности. зависимые и независимые события. Умножение вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Схема Бернулли. Биномиальная вероятность. Локальная предельная теоремы Муавра-Лапласа. Интегральная предельная теоремы Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

Случайные величины

Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Операции над случайными величинами. Функция распределения. Случайная величина дискретного и непрерывного типа. Свойства функции распределения. Плотность распределения и ее свойства. Математическое ожидание, его свойства. Дисперсия, ее свойства. Мода и медиана Основные законы распределения. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона. Геометрический закон распределения. Равномерное распределение на отрезке. Показательное распределение. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный промежуток.

Математическая статистика

Вариационные ряды и их характеристики. Средние величины. Показатели вариации. Начальные и центральные моменты вариационного ряда. Выборочный метод.

Первая и вторая темы дисциплины проводятся в интерактивной форме обучения.

Методика: обратная связь

Цель: актуализация полученного на лекции содержания

Задачи:

- выяснить реакцию участников на обсуждаемые темы,
- увидеть достоинства и недостатки организации и проведения обучения, оценить результат,
- формирование общего представления об уровне владения знаниями у обучающихся, актуальными для занятия;
- развитие коммуникативных навыков (навыков общения);
- снятие психологической и физической нагрузки на занятии.

Методика осуществления

Участникам (в произвольном порядке) предлагается высказаться по поводу прослушанной информации по вопросам, составленным преподавателем заранее.

Все высказывания должны быть выслушаны молча, без споров, комментариев и вопросов, как со стороны преподавателя, так и со стороны других участников. Каждого говорящего следует благодарить за сказанное.

Предоставлять обратную связь наравне со всеми участниками следует также преподавателю.

Начать лекцию можно с повторения предыдущего материала в виде пятиминутной контрольной работы.

Затем идет изложение материала. Рассказывается теория, обсуждаются различные материалы по теме, при этом умалчиваются отдельные важные моменты. Также в процессе чтения лекции построить так изложение материала, чтобы вынуждать обучающегося задавать вопросы. В крайнем случае (если вопросов нет) задать все вопросы самому.

В конце лекции спросить у обучающихся какие они видят перспективы использования предложенного их вниманию эффекта и каковы его недостатки.

5.2.2. Примерная тематика практических занятий

Элементы аналитической геометрии

Решение простейших задач аналитической геометрии на плоскости

Даны координаты вершин треугольника $A(2,5)$, $B(5,1)$, $C(11,3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

2) Составить уравнение линии BC.

3) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

4) Найти точку пересечения медиан.

5) Найти косинус внутреннего угла при вершине B.

6) Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.

Решение

1. Длина стороны ВС равна модулю вектора $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = \{11-5; 3-1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{6; 2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$.

2. Уравнение прямой ВС: $\dfrac{x-x_в}{x_c-x_в} = \dfrac{y-y_в}{y_c-y_в}$; $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{2}$; $x-3y-2=0$.

3. Уравнение высоты АК запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC} = \{6; 2\}$: $6(x-2)+2(y-5)=0$;

$3x+y-11=0$. Длину высоты АК можно найти как расстояние от точки А до прямой ВС:

$$\left|AK\right| = d = \frac{\left|1\cdot 2-3\cdot 5-2\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

4. Найдем координаты точки N – середины стороны ВС:

$$x_N = \frac{x_в+x_c}{2} = \frac{5+11}{2} = 8;\ y_N = \frac{y_в+y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан О делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.
Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0 = \frac{x_A+\lambda x_N}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_A+\lambda y_N}{1+\lambda};\ x_0 = \frac{2+2\cdot 8}{3} = 6;\ y_0 = \frac{5+2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3;\ O(6,\ 3).$$

5. Косинус угла при вершине В найдем как косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\{2-5;\ 5-1\} = \overrightarrow{BA}\{-3,4\}$; $\overrightarrow{BC}\{6;\ 2\}$,

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-3\cdot 6+4\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{-10}{10\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

6. Точка М, симметричная точке А относительно прямой ВС, расположена на прямой АК, перпендикулярной к прямой ВС, на таком же расстоянии от прямой, как и точка А. Координаты точки К найдем как решения системы $\begin{cases} x-3y-2=0, \\ 3x+y-11=0. \end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;\ x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2};\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ K\left(\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Точка К является серединой отрезка АМ.

$$x_K = \frac{x_A+x_M}{2};\ \frac{7}{2} = \frac{2+x_M}{2};\ x_M = 5;\ y_K = \frac{y_A+y_M}{2};\ \frac{1}{2} = \frac{5+y_M}{2};\ y_M = -4;$$

$M(5,-4)$

Задание. Даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется:

1) вычислить длину стороны ВС;
2) составить уравнение линии ВС;
3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины А;
4) вычислить длину высоты, проведенной из вершины А;
5) найти точку пересечения медиан;
6) вычислить внутренний угол при вершине В;
7) найти координаты точки М, расположенной симметрично точке А относительно прямой ВС.

1. $A(-12,-3), B(12,-10), C(-6,14)$.
2. $A(-19,-1), B(5,-8), C(-13,16)$
3. $A(-6,-5), B(18,-12), C(0,12)$.
4. $A(3,12), B(27,5), C(9,29)$.
5. $A(6,0), B(30,-7), C(12,17)$.
6. $A(-9,20), B(15,13), C(-3,37)$
7. $A(-21,18), B(3,11), C(-15,35)$.
8. $A(-15,27), B(9,20), C(-9,44)$
9. $A(-27,-24), B(-3,-31), C(-21,-7)$
10. $A(-17,26), B(7,19), C(-11,43)$
11. $A(6,2), B(30,-5), C(12,19)$.
12. $A(4,3), B(-12,-9), C(-5,15)$.
13. $A(-1,7), B(11,2), C(17,10)$.
14. $A(1,1), B(-15,11), C(-8,13)$.
15. $A(-14,10), B(10,3), C(-8,27)$.
16. $A(7,1), B(-5,-4), C(-9,-1)$.
17. $A(-2,1), B(-18,-11), C(-11,13)$.
18. $A(10,-1), B(-2,-6), C(-6,-3)$
19. $A(-12,6), B(12,-1), C(-6,23)$.
20. $A(8,0), B(-4,-5), C(-8,-2)$.
21. $A(-20,0), B(4,-7), C(-14,17)$.
22. $A(-16,-8), B(8,-15), C(-10,9)$
23. $A(-20,-6), B(4,-13), C(-14,10)$.
24. $A(-4,7), B(20,0), C(2,24)$.
25. $A(-8,8), B(16,1), C(-2,25)$.
26. $A(-24,2), B(0,-5), C(-18,19)$.
27. $A(-14,6), B(10,-1), C(-8,23)$.
28. $A(-8,-3), B(4,-12), C(8,10)$.
29. $A(-5,7), B(7,-2), C(11,20)$.
30. $A(-12,-1), B(0,-10), C(4,12)$.

Составление уравнений прямых и кривых II порядка.

Цель: *Формирование навыков составления уравнений прямых и кривых второго порядка, их построения*

На выполнение практической работы *отводится 2 часа.*

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Пример

Задание 1: Построить прямую $3x+4y-12=0$.

Решение: Найдем точки пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Пусть $x=0 \Rightarrow 4y=12 \Rightarrow y=3 \Rightarrow B(0,3)$.

Пусть $y=0 \Rightarrow 3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4 \Rightarrow A(4,0)$.

Изобразим найденные точки на координатной плоскости и соединим их, таким образом, получим прямую заданную уравнением $3x+4y-12=0$ (рис. 1).

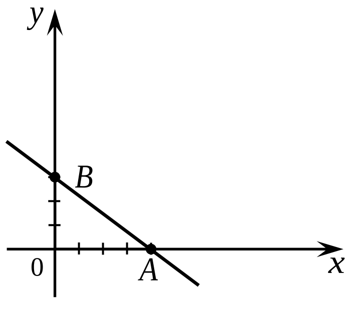


рис. 1

Задание 2: Построить прямую $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

Решение: Перепишем уравнение в виде: $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$,

то есть $a=2$ и $b=-3$. Таким образом, получаем точки $A(2;0)$ и $B(0;-3)$, прямая проходящая через точки A и B является искомой (рис. 2).

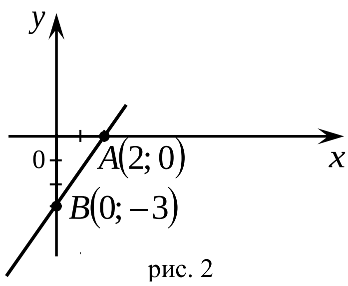


рис. 2

Задание 3: Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(2;3)$.

Решение: Вектор $OM=(2;3)$ коллинеарен искомой прямой. Для составления уравнения прямой используем каноническое уравнение прямой: $\frac{(x-x_0)}{m}=\frac{(y-y_0)}{n}$. Таким образом, подставив в данное уравнение $m=2$, $n=3$, $x=0$, $y=0$ получим искомое уравнение прямой проходящей через начало координат и точку $M(2;3)$:

$$\frac{(x-0)}{2}=\frac{(y-0)}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow 3x-2y=0.$$

<u>Задание 4:</u> Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(3;-5)$ и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}=(4;2)$.

<u>Решение:</u> Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка искомой прямой. Вектор $M_0M=(x-3;y+5)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}=(4;2)$. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{n}\cdot M_0M=0$. Записав произведение этих векторов в координатной форме, получим:

$(4;2)\cdot(x-3;y+5)=0\Leftrightarrow 4\cdot(x-3)+2\cdot(y+5)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-12+2y+10=0\Leftrightarrow 4x+2y-2=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$. Уравнение искомой прямой имеет вид $2x+y-1=0$.

Задания для самостоятельной работы

1. Проверить принадлежат ли точки $A(3;14)$, $B(4;13)$, $C(-3;0)$ и $D(0;7)$ прямой $7x-3y+21=0$.

2. Построить прямые:

1) $x=4$; 2) $x=-3$; 3) $y=2$;

4) $2x-5y+10=0$; 5) $4x+6y-3=0$; 6) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$;

7) $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$; 8) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 9) $-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1$.

3. Построить фигуру, ограниченную линиями $x=-2$, $x=0$, $y=-3$ и $y=0$. Вычислить площадь этой фигуры.

4. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:

1) $3x-4y+2=0$; 2) $x+y-3=0$;

3) $2x+3y+1=0$; 4) $2x+3y-6=0$;

5) $3x-4y+12=0$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(x;y)$:

1) $M(-4;-1)$;

2) $M(5;-4)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}$:

1) $M_0(-2;-3)$; $\vec{n}=(4;5)$;

2) $M_0(1;-1)$; $\vec{n}=(-3;4)$.

7. Составить уравнение окружности, проходящей через точки:

1) $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$;

2) $A(2;8)$, $B(4;-6)$, $C(-12;-6)$;

3) $A(-2;-6)$, $B(-3;1)$, $C(4;2)$.

8. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A и B, а фокусы в точках F_1 и F_2:

1) $A(-5;0)$, $B(5;0)$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$;

2) $A(0;-8)$, $B(0;8)$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$;

3) $A(0;-4)$, $B(0;4)$, $F_1(0;-2)$, $F_2(0;2)$.

Контрольные варианты

Дано уравнение линии $F(x,\ y)=0$. Записать это уравнение в нормальной форме. Записать координаты фокусов. Если эта линия окажется параболой, то записать уравнение директрисы.

1. $x^2-4y^2-8x+4y+4=0$.
2. $8x^2+48x+18y+63=0$.
3. $3x^2-y^2+48x+144=0$.
4. $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$.
5. $x^2+4y^2-6x+8y-3=0$.
6. $2y^2+8x+12y-3=0$.
7. $x^2-2y^2+4x-3y-3=0$.
8. $5x^2+6y^2+10x-12y-31=0$
9. $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$.
10. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.
11. $16y^2-9x^2+32y+54x-209=0$.
12. $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$.
13. $9x^2+25y^2-36x-50y-164=0$.
14. $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.
15. $9y^2-4x^2+18y+8x-31=0$.
16. $x^2+2y^2+4x-12y+18=0$.
17. $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$.
18. $4x^2-9y^2-8x+36y+32=0$.
19. $9x^2+16y^2+36x-64y-44=0$.
20. $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$.
21. $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$.
22. $x^2-4y^2-20x+10y+90=0$.
23. $x^2-4y^2+8x-24y+44=0$.
24. $9x^2-4y^2-18x-16y-11=0$.
25. $4x^2+9y^2+8x+36y-32=0$.
26. $2x^2+3y^2+8x-6y+8=0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется общим уравнением прямой?
2. Какой вид имеет векторное уравнение прямой?
3. Какое уравнение называется каноническим уравнением прямой?
4. Запишите уравнение прямой в отрезках на осях и уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Элементы линейной алгебры

Операции над матрицами. Вычисление определителей.

Произведением матрицы A **на число** α: $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, то $5A=\begin{pmatrix}-10 & 20\\ 15 & 40\end{pmatrix}$.

Сумма двух матриц А и В.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 8 & 10 & 7\end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы А на матрицу В

где $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения С, умножая элементы каждой строки матрицы А на соответствующие элементы столбцов матрицы В следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 3+0\cdot 5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot 0+0\cdot 4+2\cdot 0 & (-1)\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1\\ 3\cdot 3+4\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+4\cdot 4+0\cdot 0 & 3\cdot 1+4\cdot 4+0\cdot 1\end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 1\\ 29 & 16 & 19\end{pmatrix}.$

Транспонирование матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Определителемматрицы первого порядка

$A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, тогда $|A|=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5-8\cdot 1=-18.$

Определителемматрицы третьего порядка

$$|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}.\ |A|=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 6=21.$$

Задание №1. Вычислить 5A - 2B.

Вар.	A	B	Вар.	A	B
1	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 10 & 5 & 1\end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix}4 & 5 & -5\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & 7 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 8 & 9\end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 10 & 5 & 1\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 10 & 5 & 1\end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 2. Умножить матрицы:

вариант

1 $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};$

2 $\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$;

3 $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\3&-5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&4&3\\5&-1&-1\\3&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&5\\1&4&-1\\3&-5&2\end{pmatrix}$.

4 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&-1&2\\3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\1&3&5\end{pmatrix}$;

5 $\begin{pmatrix}1&2\\8&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2\\5&0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$;

6 $\begin{pmatrix}1&2\\-4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\1&2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\3&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&-3\\-4&3&-5\\5&-4&7\end{pmatrix}$;

7 $\begin{pmatrix}1&-1\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0\\4&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2&2&-3\\-4&3&-5\\5&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\3&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$;

8 $\begin{pmatrix}2&3\\8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$;

9 $\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-7\\1&4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&1&1\\5&4&3\\10&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&-4&1\\-25&9&-2\\15&-5&1\end{pmatrix}$;

10 $\begin{pmatrix}1&2\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4\\5&8\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}11&-4&1\\-25&9&-2\\15&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\5&4&3\\10&5&1\end{pmatrix}$;

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить определители:

вариант

1. $\begin{vmatrix}2&-1&7\\4&3&-5\\-6&-4&3\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&1&3\\4&5&6\\0&-1&7\end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&-5&8\\2&1&-3\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&0&-1\\4&3&2\\5&-6&7\end{vmatrix}$;

вариант

6. $\begin{vmatrix}2&4&1\\3&4&2\\4&1&-3\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}1&4&6\\2&-1&-7\\3&5&-2\end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&3\\0&5&-1\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}2&5&7\\2&8&5\\8&7&3\end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;

10 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$;

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

1. Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 15 - 10 + 2 - 9 = -1$.

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \Rightarrow x = \dfrac{-2}{-1} = 2$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & 38 \\ 13 & 0 & 29 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 17 & 38 \\ 13 & 29 \end{vmatrix} = 17\cdot 29 - 13\cdot 38 = 493 - 494 = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{-1} =$$

Ответ: $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$.

вари-ант	Задания 1.	Задания 2.	вари-ант	Задания 1.	Задания 2.
1.	$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$	**16.**	$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$	**17.**	$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$	**18.**	$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

4.	$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$	**19.**	$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$	**20.**	$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2. \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$	**21.**	$\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$	**22.**	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$	**23.**	$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$	**24.**	$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$	**25.**	$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$	**26.**	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$
12.	$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \quad . \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$	**27.**	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5; \\ x + y + z = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$

13.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.	**28.**	$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$;	$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \end{cases}$.
14.	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 4x+y+3z=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.	**29.**	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.
15.	$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.	**30.**	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 4x+y+3z=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Теоретическая справка.

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ x-2y=-3 \end{cases}\cdot$$

Решение. Пусть $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. $AX=B$. Решаем его, домножая слева на обратную матрицу: $A^{-1}AX=A^{-1}B \;\Rightarrow\; EX=A^{-1}B$. Отсюда получаем решение $X=A^{-1}B$.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=3(-1)(0-(-2))=-6\cdot$$

$$A_{11}=\underset{(+)}{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0-2=-2$$

$$A_{21}=\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-(0-(-2))=-2$$

Далее находим все алгебраические дополнения. Составляем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot(+3) \\ 1\cdot 2+1\cdot 1+(-3)(-3) \\ 5\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-3)(-3) \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

вари-ант	№1	№2	апри-ант	№1	№2
1	$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 9x + 2y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 5x - 3y = -16 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 4x - 5y = 9 \\ 3x - 6y = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ 4x - 6y = -12 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 2x + 6y = 26 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 7x + y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 5x + 9y = -26 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} 4x - 5y = 23 \\ 3x + 9y = -21 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 4x - 9y = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 9x + 2y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x + 9y = 20 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 7x + y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x - 5y = 23 \\ 3x + 9y = -21 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 8x - 3y = 39 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 3x + 9y = 20 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 8x + 2y = -6 \\ 3x - 5y = -31 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2z=11 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y+4z=-1 \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 8x + 2y = -6 \\ 3x - 5y = -31 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x + 9y = -15 \\ x + 10y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+3y-z=7 \\ 3x-y-4z=12 \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 5x - 3y = -16 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2z=11 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y+4z=-1 \end{cases}$

12	$\begin{cases}5x + 9y = -26\\ 4x - 2y = 16\end{cases}$	$\begin{cases}x+3y-z=-2\\ 2x+2y-z=1\\ 2x+3y+3z=4\end{cases}$	**27**	$\begin{cases}3x - 4y = -10\\ 4x - 6y = -12\end{cases}$	$\begin{cases}2x-y+z=4\\ x+3y-z=7\\ 3x-y-4z=12\end{cases}$
13	$\begin{cases}3x - 5y = -37\\ 4x + 6y = 14\end{cases}$	$\begin{cases}2x+y-z=7\\ 2x-2y+3z=3\\ x-y-z=4\end{cases}$	**28**	$\begin{cases}2x + 6y = 26\\ 3x + 5y = 19\end{cases}$	$\begin{cases}x+3y-z=-2\\ 2x+2y-z=1\\ 2x+3y+3z=4\end{cases}$
14	$\begin{cases}15x + 9y = -21\\ 8x + 3y = 12\end{cases}$	$\begin{cases}x-2y+z=-2\\ x+2y+2z=1\\ 3x+y+4z=0\end{cases}$	**29**	$\begin{cases}2x - 5y = 8\\ 4x - 9y = 12\end{cases}$	$\begin{cases}2x+y-z=7\\ 2x-2y+3z=3\\ x-y-z=4\end{cases}$
15	$\begin{cases}3x + 5y = -9\\ 7x - 2y = 20\end{cases}$	$\begin{cases}x+y-z=0\\ 2x-y+z=3\\ x-y+2z=5\end{cases}$	**30**	$\begin{cases}-x + 3y = 4\\ 2x - 2y = 7\end{cases}$	$\begin{cases}x-2y+z=-2\\ x+2y+2z=1\\ 3x+y+4z=0\end{cases}$

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

<u>Теоретическая справка.</u>

$$\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x+y-z=1\\ x-2y=-3\end{cases}$$

Выписываем расширенную матрицу $B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее или к треугольному виду.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & -3\end{array}\right)(-2)\ \ (-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & -1 & -1 & -5\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 3 & -3 & -3\end{array}\right)(3) \Rightarrow$$

xyz

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -6 & -18\end{array}\right) \begin{array}{c} :(-1)\\ :(-6)\end{array} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}.\ rA=3,\ rB=3 \Rightarrow r=3.$$

Так как число неизвестных $n=3$ и равно рангу системы, система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это решение: $\begin{cases}x-y+z=2\\ y+z=5\\ z=3\end{cases}$.

Из последнего уравнения $z=3$, с помощью второго находим $y=5-z=5-3=2$. Подставляя в первое уравнение найденные $y=2$ и $z=3$, находим $x=2+y-z=2+2-3=4-3=1$.

Ответ: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

вариант	№1	№2	ва-риант	№1	№2
1.	$\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;
2.	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$;	$\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;
3.	$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$;	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	$\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$;	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$;	$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$;	18	$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	$\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;	$\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$;	19	$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$;	$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$;
7.	$\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;	20	$\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	$\begin{cases} 11x+17y+6z-39u=1 \\ 2x-3y-5z-u=0 \\ x+32y+31z-34u=1 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$;	$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$

9.	$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	$\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$;	22	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 11x+17y+6z-39u=1 \\ 2x-3y-5z-u=0 \\ x+32y+31z-34u=1 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;	23	$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	$\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$;
11.	$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2 \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$;	$\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;	24	$\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;
12.	$\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$	$\begin{cases} x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \\ 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2 \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;
13.	$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	$\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$;	26	$\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$;	$\begin{cases} x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \\ 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \end{cases}$;

Основы математического анализа

Вычисление пределов функций. Исследование функций на непрерывность.

Теоретическая справка.

Правило 1. Чтобы вычислить $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{q(x)}$, нужно вместо переменной x поставить её предельное значение x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=C\neq 0,$ то $A=\frac{0}{C}=0.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=C\neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=0,$ то $A=\frac{C}{0}=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=0,$ то $A=\frac{0}{0}$ - неопределенность.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ в алгебраическом выражении, надо в числителе и знаменателе выделить множитель $x-x_0$, который стремится к нулю, и на него под знаком предела сократить.

Правило 3. Если в числителе и знаменателе стоят многочлены, то чтобы получить множитель $x-x_0$, нужно многочлены разложить на множители.

Задание №1.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$.	2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{3x^2+10x+8}$.	3. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$.	5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.	6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$.
7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+x-6}$.	8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$.	9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$.
10. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x^2-x}{3x^2+8x-3}$.	11. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$.	12. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-7x-3x^2}{2x^2+7x+3}$.
13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$.	14. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$.	15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$.

Задание №2.

1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$	2	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$	3	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$
4	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$	5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$	6	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$
7	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$	8	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$	9	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$
10	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$	11	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$	12	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$
13	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$	15	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$

Задание №3.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+7x^3-4}{6x^5-3x^2+2}$	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{2x^3+x^2-2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^3+x^2+4x}$	5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+2x^3-5x^4}{2x^5+5x^2-3}$	6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x+1}{2x^5+4x+5}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$	8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$	9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x+1}{3x^4+x+3}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^4}{x^5+x+3}$	12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{5x^5-x+4}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$	14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-8x+1}{4x^2+x+1}$	15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$

Задание №4. Исследовать функции на непрерывность

1. $y(x)=5^{\frac{1}{x-4}}$ при $x_1=2, x_2=4$;	2. $y(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4x+3}$ при $x_1=3, x_2=5$;	3. $y(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$ при $x_1=3, x_2=5$;
4. $y(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ при $x_1=1, x_2=2$	5. $y(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$ при $x_1=2, x_2=3$;	6. $y(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$ при $x_1=1, x_2=3$;
7. $y(x)=2^{\frac{1}{x+3}}$	8. $y(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$	9. $y(x)=4^{\frac{1}{x-2}}$

при $x_1=-3, x_2=0$;	при $x_1=1, x_2=3$;	при $x_1=2, x_2=4$;
10. $y(x)=5^{\frac{1}{x-4}}$ при $x_1=2, x_2=4$;	11. $y(x)=\frac{2x}{x^2-2x-3}$ при $x_1=1, x_2=3$;	12. $y(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$ при $x_1=2, x_2=3$;
13. $y(x)=\frac{2x}{x^2-2x-3}$ при $x_1=1, x_2=3$;	14. $y(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$ при $x_1=3, x_2=5$;	15. $y(x)=\frac{x^2}{x-2}$ при $x_1=1, x_2=2$;

Выполнение приближенных вычислений с помощью дифференциала

Если функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, то при изменении аргумента на Δx ее приращение в этой точке выражается формулой

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где первое слагаемое $A\Delta x$ представляет собой дифференциал функции, а второе слагаемое является величиной более высокого порядка малости по отношению к Δx. Дифференциал функции обозначается символом dy и связан с производной в точке x_0 соотношением

$$dy = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x.$$

Таким образом, приращение функции Δy можно записать как

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

При достаточно малых приращениях аргумента Δx можно пренебречь "нелинейной" добавкой $o(\Delta x)$. В таком случае справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Заметим, что абсолютная погрешность данного приближения, то есть разность $\Delta y - dy$ стремится к нулю при$\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y - dy) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cancel{dy} + o(\Delta x) - \cancel{dy}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} o(\Delta x) = 0.$$

Более того, относительная погрешность также стремится к нулю при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{f'(x)\Delta x} = \frac{1}{f'(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

поскольку $o(\Delta x)$ соответствует члену второго и более высокого порядка малости по отношению к Δx.

Таким образом, для приближенных расчетов можно использовать следующую формулу:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Пример 1

Найти приближенное значение $\sqrt[3]{30}$.

Решение.

По условию $x = 30$. Выберем начальную точку $x_0 = 27$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 30 - 27 = 3$. Производная функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ равна

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

а ее значение в точке x_0 составляет:

$$f'(x_0)=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{3\cdot 3^2}=\frac{1}{27}.$$

В результате получаем следующий ответ:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x, \qquad \Rightarrow \sqrt[3]{30}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{27}\cdot 3=3+\frac{1}{3}=\frac{28}{9}\approx 3{,}111.$$

Задания.

1. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\sqrt[3]{27,5}$
2. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\sin 31^\circ$
3. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\sqrt[4]{15,8}$
4. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,05$
5. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\lg 11$
6. С помощью дифференциала вычислить приближенно $e^{2,01}$
7. С помощью дифференциала вычислить приближенно $2^{3,1}$
8. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\arcsin 0,6$
9. С помощью дифференциала вычислить приближенно $(3,02)^4+(3,02)^3$
10. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\ln(\operatorname{tg}46^\circ)$

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Задание. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^4-2x^2-3$ на промежутке $[0;2]$.

№ шага	План нахождения y_{min} и y_{max} на $[a;b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$
2	Находим критические точки функции	$y'=0$, $4x(x^2-1)=0$, $x=0$ или $x^2-1=0$, $x=-1;0;1$ - критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a;b]$	$0;1\in[0;2]$
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(0)=-3$ $y(1)=1-2-3=-4$ $y(2)=16-8-3=5$
5	Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее	$y_{min}=y(1)=-4$, $y_{max}=y(2)=5$

Задание №1.

1) $f(x)=2x^2-4x+3$, $[0;4]$;

2) $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$;

3) $f(x)=3x^3-9x^2+2$, $[-1;1]$;

4) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$;

5) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$;

Задание №2.

1.	$y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0;\ 1]$.
2.	$y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2;\ 2]$.
3.	$y = 2 - 2x^2 + x^4$ на отрезке $[0; 3]$.
4.	$y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
5.	$y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0;\ 2]$.
6.	$y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9};\ 4\right]$.
7.	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ на отрезке $[1;\ 3]$.
8.	$y = \sin x - 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.
9.	$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ на отрезке $[0;\ 4]$.
10.	$y = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x + 1$ на отрезке $[0;\ 4]$.
11.	$y = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ на отрезке $[0;\ 2]$.
12.	$y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0;\ 3]$.
13.	$y = 15 + 4x^2 - x^4$ на отрезке $[-1;\ 2]$.
14.	$y = 3x - x^3$ на отрезке $[-2;\ 3]$.
15.	$y = 3x - x^3$ на отрезке $[0;\ 3]$.
16.	$y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[0;\ 2]$.
17.	$y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0;\ 1]$.
18.	$y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2;\ 2]$.
19.	$y = 2 - 2x^2 + x^4$ на отрезке $[0; 3]$.
20.	$y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
21.	$y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0;\ 2]$.
22.	$y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9};\ 4\right]$.
23.	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ на отрезке $[1;\ 3]$.
24.	$y = \sin x - 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.
25.	$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ на отрезке $[0;\ 4]$.
26.	$y = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x + 1$ на отрезке $[0;\ 4]$.
27.	$y = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ на отрезке $[0;\ 2]$.
28.	$y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0;\ 3]$.

29.	$y=15+4x^2-x^4$ на отрезке $[-1;\ 2]$.
30.	$y=3x-x^3$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

Исследование функции и построение графиков.

Схема исследования функций

1) Область определения функции.
2) Точки пересечения с осями. (Если они имеются).
3) Точки разрыва. (Если они имеются).
4) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.
5) Области выпуклости и вогнутости. Точки перегиба. (Если они имеются).
6) Асимптоты.(Если они имеются).
7) Построение графика.

Задание 1 уровень.

1. $f(x)=3x^4-4x^3+1$
2. $y=x^2-3x+2$
3. $y=2x^2-x^4-1$
4. $y=6x-x^2-5$
5. $y=3x-x^3$
6. $y=x^3-3x^2+4$
7. $y=x^3-3x+1$
8. $y=2x^3-3x^2-36x+40$
9. $y=2-2x^2+x^4$
10. $y=x^4-2x^2+5$

Задание 2 уровень.

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.	2. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.	3. $y=\dfrac{3x}{4+x^2}$.	4. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.
5. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.	6. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.	7. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.	8. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$.
9. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.	10. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.		

Интегрирование по частям и с помощью замены переменных

Теоретическая справка.

Проинтегрировать функцию $f(x)$ - значит найти ее неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

В основе интегрирования *способом подстановки* (или *замены переменной*) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u(x)$ - произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов:

1) $x=\varphi(t)$ - где t - новая переменная, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) $t=\psi(x)$, где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx=\int f(t)dt \qquad (2)$$

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv=uv-\int vdu, \qquad (3)$$

где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (3) отыскание интеграла $\int udv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int vdu$, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv - соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin axdx, \quad \int P(x)\arccos axdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv - выражение $P(x)dx$.

Примеры

Найти интегралы: 1) $\int \sin 3xdx$; 2) $\int (x-5)\cos xdx$.

Решение: 1) Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет находиться аргумент $3x$ подынтегральной функции $\sin 3x$. Так как $d(3x)=3dx$, то $\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x)$. Следовательно, подстановка $3x=t$ приводит рассматриваемый интеграл к табличному: $\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x)=\frac{1}{3}\int \sin tdt=-\frac{1}{3}\cos t+C$. Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим $\int \sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

2) Предполагая $u=x-5$, $dv=\cos xdx$, найдем $du=dx$, $v=\int \cos xdx=\sin x$. Следовательно, $\int (x-5)\cos xdx=(x-5)\sin x-\int \sin xdx=(x-5)\sin x+\cos x+C$.

Задания для самостоятельной работы

Найти интегралы методом непосредственного интегрирования:

1) $\int x^7dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^5}$;

3) $\int (x^4-4x^3+2x)dx$; 4) $\int \frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx$;

5) $\int \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$; 6) $\int 7^x dx$;

7) $\int 8\cos x dx$;   8) $\int \frac{\sin x}{9} dx$;

9) $\int \frac{x^2-7}{9-x^2} dx$

Найти интегралы способом подстановки:

1) $\int \cos 5x dx$;   2) $\int (12x-5)^7 dx$;   3) $\int \sqrt{8x+9} dx$;

4) $\int \frac{dx}{6x+5}$;   5) $\int 6^{5x+2} dx$;   6) $\int e^{4-3x} dx$;

7) $\int \sin x \cos^2 x dx$;   8) $\int \frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2} dx$;   9) $\int \cos^2 x dx$.

Найдите интегралы при помощи интегрирования по частям:

1) $\int (x-7)\sin x dx$;   2) $\int x^2 \cos x dx$;   3) $\int e^{2x} \cos x dx$;

4) $\int 4^x \sin x dx$;   5) $\int \sqrt{4+x^2} dx$;   6) $\int \cos\sqrt{x} dx$.

Вопросы для самоконтроля:

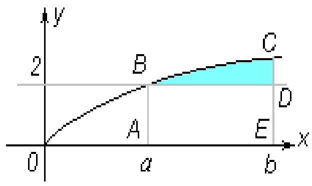
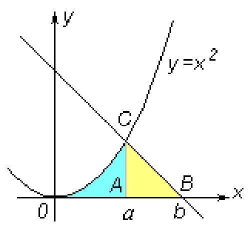
1. Что называется первообразной? Перечислите свойства первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
4. Перечислите основные формулы интегрирования.
5. Какие методы интегрирования вы знаете? В чем заключается их сущность?

Приложения определенного интеграла.

Теоретическая справка.

Определение. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$. Площадь S криволинейной трапеции находится по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\cdot$$

№	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение плана	
шага		а) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$	б) $y=x^2$, $y=2-x$, $y=0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		
2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S=S_{ABCDE}-S_{ABDE}=$ $=\int_a^b \sqrt{x}dx-\int_a^b 2dx$	$S=S_{OAC}+S_{ACB}=$ $=\int_0^a x^2dx+\int_a^b (2-x)dx$

3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$, $a=x_A=4,\ b=x_B=9$	$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x; \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2;1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле (*)	$S=\int\limits_4^9 \sqrt{x}dx-\int\limits_4^9 2dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right\|_4^9-$ $-\left.2x\right\|_4^9=\frac{2}{3}(27-8)-2(9-4)=$ $=\frac{8}{3}$, $S=2\frac{2}{3}$ (кв.ед.)	$S=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2(2-x)dx=$ $=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right\|_1^2=\frac{1}{3}+$ $+\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$, $S=\frac{5}{6}$ (кв.ед.)

Примеры. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2, y=0, x=2$;
2) $y=x^2, y=1$;
3) $y=-x^2+1, y=0$;
4) $y=1+x^2, y=2$
5) $y=e^x, y=0, x=0, x=1$
6) $y=x^3, y=\sqrt{x}$;
7) $y=2x-x^2, y=\frac{3}{4}$
8) $y=x^3, y=1, x=2$;
9) $y=\frac{5}{x}, y=6-x$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

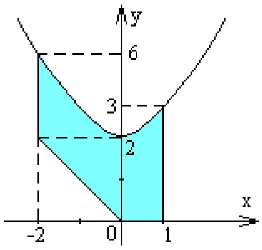
Вариант 1.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-3x+4,\quad y=x+1$.
2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется

а) $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(x^2-2\right)dx-2$;

б) $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+2\right)dx+2$;

в) $S=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+2\right)dx-2$.

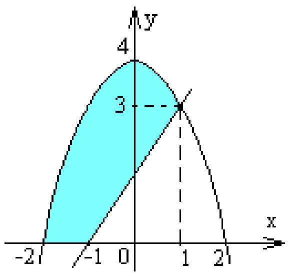


Вариант 2.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=0{,}5x^2-2x+3,\quad y=7-x$.
2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляет

а) $S=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+4\right)dx-3$;

б) $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+3$;



в) $S=\int\limits_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)dx-3$.

Вариант 3.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=(x-2)^2,\quad y=4-x^2$.
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x-1},\ y=2,\ y=0,\ x=0$, равна:

а) $4\frac{2}{3}$; б) 4; в) $3\frac{1}{3}$.

Вариант 4.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-2x+2,\quad y=2+4x-x^2$.
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x+1},\ y=2,\ y=0,\ x=-2$, равна:

а) $4\frac{1}{3}$; б) $3\frac{2}{3}$; в) $4\frac{2}{3}$.

Вариант 5.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-2x+4,\quad y=3,\ x=-1$.
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=a\ (a>0)$, равна $\frac{e-1}{2}$, если, a равно:

а) $\frac{e}{2}$; б) 0,5; в) $\frac{1}{2e}$.

Вариант 6.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=4x-x^2,\quad y=4-x$.
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2e^{0,5x},\ y=0,\ x=0,\ x=b\ (b>0)$, равна $4e^2-4$, если b равно:

а) $2e$; б) 4; в) $\frac{4}{e}$.

Вариант 7.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=6+x-x^2,\quad y=6-2x$.
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-|x|,\ y=x^2$, равна:

а) $2\frac{5}{6}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{3}$.

Вариант 8.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+6,\quad y=1,\ x=1,\ x=3$.
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-|x|,\ y=2-x^2$, равна:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся над осью Ox?
2. По какой формуле вычисляется площадь фигуры прилегающей к оси Oy?
3. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся под осью Ox?
4. По какой формуле вычисляется площадь фигуры расположенной по обе стороны оси Ox?
5. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, ограниченной двумя пересекающимися кривыми?

Вычисление частных производных и дифференциала функции нескольких переменных

Теоретическая справка.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать $$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Пример. Найти частные производные функции $z=5x^3y^2-x$.

Решение. Имеем

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=15x^2y^2-1$ (y фиксировано);

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=10x^3y$ (x фиксировано).

Определение: **Полным дифференциалом** функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных: $df(x,y,z,...,t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+...+\dfrac{\partial f}{\partial t}dt$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u=x^{y^2z}$.

$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2zx^{y^2z-1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\ln x\cdot 2yz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\ln x\cdot y^2$;

$$du=y^2zx^{y^2z-1}dx+2x^{y^2z}yz\ln x dy+y^2x^{y^2z}\ln x dz$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z=\dfrac{y}{x^2-y^2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2yx}{(x^2-y^2)^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y'(x^2-y^2)-y(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{x^2-y^2+2y^2}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$ $dz=-\dfrac{2xy}{(x^2-y^2)}dx+\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}dy$

Задания.

ЗАДАНИЕ 1. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции:

вариант 1.	вариант 2.
$z=x^2+xy+y^2-2x-y.$	$z=x^2+y^2-6x+8y-2.$
$z=x^2+y^2+4x-4y+3.$	$z=2x-2y-x^2-y^2+6.$
$z=4x+5y-x^2-xy-y^2+4.$	$z=x^2-8x-10y+xy+y^2+17.$
$z=1+6x-x^2-xy-y^2.$	$z=3x+9y-x^2-xy-y^2-4.$
$z=6x-8y-x^2-y^2-17.$	$z=13y+11x-xy-x^2-y^2+5.$
$z=e^{xy}+\ln(x+\ln y).$	$z=2^{xy}+\sin(2xy).$
$z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{y}.$	$z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

$z=\ln\left(x^2+y^2+xy\right).$ $z=\arccos\sqrt{x^2+y^2}.$. $z=\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}.$	$z=2^{xy^3}+\arcsin\, x.$ $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}.$. $z=x^y+\operatorname{arctg}(x+y).$

ЗАДАНИЕ № 2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z=\arcsin\dfrac{x+y}{xy}.$	**2.** $z=\sin(x+y)+\operatorname{tg}\left(x^2y\right).$
3. $z=\ln\left(x^2+3y^2+xy\right).$	**4.** $z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\cdot\sin\dfrac{y}{x}.$
5. $z=\ln\dfrac{xy}{5x+y}.$	**6.** $z=\cos x^3+\sin y^3-xy.$
7. $z=x^y+y^x.$	**8.** $z=\sin\ln\dfrac{x}{y}.$
9. $z=\ln\cos(xy).$	**10.** $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

ЗАДАНИЕ 3. Найти полный дифференциал функции

1. $z=e^{x^2y}-\dfrac{2x}{y^2}-\dfrac{\sqrt{y}}{x}$
2. $z=x^3\sqrt{y}-xy^2+3y^3$
3. $z=x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$
4. $z=(\sin x)^y$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется функцией нескольких переменных?
2. Что называется областью определения функции n переменных?
3. Что называется частным значением функции двух переменных?
4. Что называется границей области?

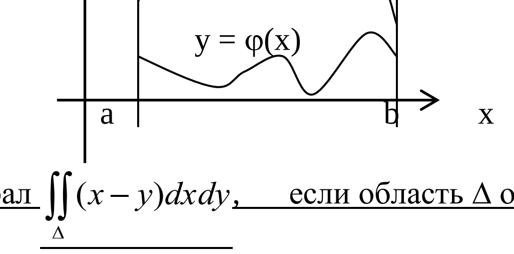
Вычисление двойных интегралов

Теоретическая справка.

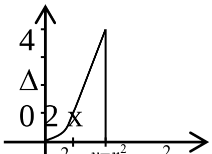
Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a<b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ≤ψ, тогда*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

Δ



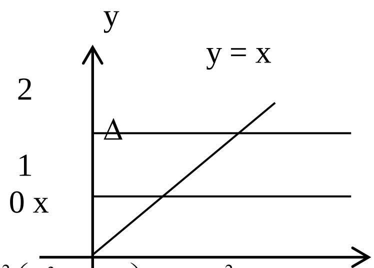
Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.



$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_0^{x^2}(x-y)dy = \int_0^2 \left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 = 4-3{,}2=0{,}8$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c<d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤Ψ(y)), то* $\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



$$\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy = \int_1^2 dy\int_0^x (x^2+y^2)dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y dy = \int_1^2 \frac{4}{3}y^3dy = \frac{4}{12}y^4\Big|_1^2 = \frac{64}{12}-\frac{4}{12}=5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_\Delta (3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint_\Delta (3x^2-2xy+y)dxdy = \int_0^2 dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx = \int_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2} dy ==$$

$$\int_0^2 (y^6-y^5+y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

Практические задания

1. Вычислить повторные интегралы:

1) $\int_0^1 dx\int_1^2 \left(x^2+y^2\right)dy$; 2) $\int_0^2 dx\int_x^{x^2}\left(x+2y\right)dy$;

3) $\int_1^2 dy\int_0^3 \left(x^2+y^2\right)dx$; 4) $\int_2^3 dx\int_x^{2x}\frac{y}{x}dy$;

5) $\int_1^2 dy\int_{2y}^{4y} xydx$; 6) $\int_0^1 dy\int_0^{y^2}\left(3x-2y\right)dx$.

2. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

1) $\iint_D xdxdy,\ xy=4,\ x+y-5=0$;

2) $\iint_D x^2ydxdy,\ x^2+y^2=16,\ x+y-4=0$;

3) $\iint_D ydxdy,\ y=x^2,\ x=-2,\ x=2,\ y=4$;

4) $\iint\limits_D x^2 y dxdy,\ y = x,\ y = \dfrac{1}{x},\ x = 2;$

5) $\iint\limits_D xy dxdy,\ y = 0,\ y = 4 - x^2;$

6) $\iint\limits_D x^3 dxdy,\ x = 0,\ y = x,\ y = 6 - x^2.$

Вопросы для самоконтроля:

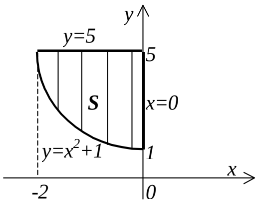
1. Что называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области D?
2. Дайте определение двойного интеграла.
3. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
4. Какие случаи расположения области D относительно осей координат возникают при вычислении двойных интегралов? Запишите формулы вычисления двойных интегралов для каждого из этих случаев.
5. Какие интегралы называются повторными или двукратными?

Приложение двойных интегралов

Теоретическая справка.

1. Площадь плоской фигуры $S = \iint\limits_S dxdy$

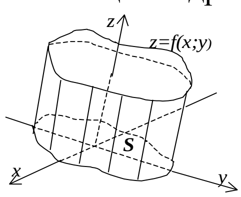
Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: *x=0, y=5, y=x²+1*.



$$S = \iint\limits_S dxdy = \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{x^2+1}^{5} dy = \left| \int\limits_{x^2+1}^{5} dy = y\Big|_{x^2+1}^{5} = 5 - (x^2+1) = 4 - x^2 \right| =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-2}^{0} = 0 - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \frac{16}{3};$$

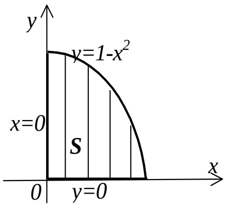
2. Объем цилиндрического тела, снизу ограниченного частью *S* плоскости *(xy)*, сверху – поверхностью *z=f(x;y)*, а с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *Oz*: $V = \iint\limits_S f(x;y)dxdy$



3. Масса плоской пластинки, занимающей область *S*и плотность которой задается функцией $\mu=\mu(x,y)$:

$$m = \iint\limits_S \mu(x;y)dxdy$$

Пример. Вычислить массу плоской пластины ограниченной линиями *x=0, y=0, y=1-x²*, если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки, $\mu=x$;



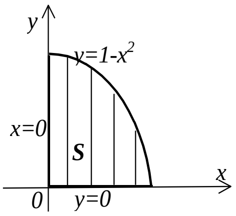
$$m = \iint\limits_S x dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} x dy = \left[\int\limits_0^{1-x^2} x dy = xy\Big|_0^{1-x^2} = x(1 - x^2) = x - x^3 \right] =$$

$$= \int\limits_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

4.

Координаты центра тяжести плоской пластины *C(x_c;y_c)* $x_C = \dfrac{\iint\limits_S x\mu(x;y)dxdy}{\iint\limits_S \mu(x;y)dxdy}$;

$y_c=\dfrac{\iint\limits_S y\mu(x;y)dxdy}{\iint\limits_S \mu(x;y)dxdy}$ **Пример**. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=1-x^2$, $\mu=const$.



$$\iint_S \mu dxdy=\mu\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}dy=\left|\int_0^{1-x^2}dy=y\Big|_0^{1-x^2}=1-x^2\right|=\mu\int_0^1(1-x^2)dx=\mu\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\mu;$$

$$\iint_S x\mu dxdy=\mu\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}xdy=\left|\int_0^{1-x^2}xdy=xy\Big|_0^{1-x^2}=x(1-x^2)\right|=\mu\int_0^1(x-x^3)dx=\mu\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\mu;$$

$$\iint_S \mu dxdy=\mu\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}ydy=\left[\int_0^{1-x^2}ydy=\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x^2}=\frac{(1-x^2)^2}{2}=\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right]=\mu\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\mu\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}\mu;$$

$$x_C=\frac{\iint\limits_S x\mu(x;y)dxdy}{\iint\limits_S \mu(x;y)dxdy}=\frac{\frac{1}{4}\mu}{\frac{2}{3}\mu}=\frac{3}{8};\quad y_C=\frac{\iint\limits_S y\mu(x;y)dxdy}{\iint\limits_S \mu(x;y)dxdy}=\frac{\frac{4}{15}\mu}{\frac{2}{3}\mu}=\frac{2}{5};\ \mathrm{C}\left(\frac{3}{8};\frac{2}{5}\right).$$

Контрольные вопросы

1. Запишите формулы, используемые для вычисления объемов тел и площадей.
2. Запишите формулу, используемую для вычисления массы плоской пластины.
3. Запишите формулы, используемые для вычисления координат центра масс плоской пластинки.

Практическое задание.

№1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y=x^2, y=0, x=2$;	$y=x^3, y=\sqrt{x}$;
$y=x^2, y=1$;	$y=2x-x^2, y=\frac{3}{4}$;
$y=-x^2+1, y=0$;	$y=x^3, y=1, x=2$;
$y=1+x^2, y=2$;	$y=\frac{5}{x}, y=6-x$.
$y=e^x, y=0, x=0, x=1$;	$y=\sqrt{x+2},\quad y=x,\quad x=7$.

№2 Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точки $\mu=\mu(x,y)$.

$x=0\quad y=2x\quad x+y=2\quad \mu=2-x-y$

№3. Найти центр тяжести пластинки D, ограниченной кривыми с поверхностной плотностью μ :

№1

$D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,$
$x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0);$
$\mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

№2

$D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0);$
$\mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$

№3

$D: x=1, y=0, y^2=4x\ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/2+5y.$

Исследование сходимости положительных рядов

Теоретическая справка.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$*, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Признак Коши. (радикальный признак)</u>

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

<u>**Следствие.**</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Признак Коши. (интегральный признак)</u>

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, *то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.*

Теоретические вопросы.

1) Что называют числовым рядом?
2) Какой ряд называется сходящимся, расходящимся?
3) Сформулируйте признак Даламбера.
4) Сформулируйте радикальный признак Коши.
5) Сформулируйте интегральный признак Коши

Практические задания.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с помощью признака Даламбера.

а) $u_n=\frac{2n^3}{3^{2n}}$ б) $u_n=\frac{n^2}{(n+2)!}$ в) $u_n=\frac{(n-1)^2}{2^n(n+1)!}$,

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с помощью радикального признака Коши

а) $u_n = n\left(\dfrac{3n+1}{4n+3}\right)^{2n}$ б) $u_n = \left(\dfrac{2n}{4n+7}\right)^{n^2}$

в) $u_n = \left(\dfrac{8n+1}{4n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{3}}$

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью интегрального признака Коши.

а) $u_n = n^2 e^{-n^3}$ б) $u_n = n \cdot 4^{-n^2}$ в) $u_n = \dfrac{3(n+1)^2}{e^{(n+1)^3}}$

Исследование сходимости знакочередующихся рядов

Теоретическая справка.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд (1) называется *знакочередующимся*, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине и общий член a_n стремиться к нулю при $n \to \infty$, то ряд (1) сходится.

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots, \qquad (2)$$

составленный из абсолютных величин его членов, то есть всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд (1) сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд (2) расходится, то данный ряд (1) называется *условно (неабсолютно) сходящимся*. Заметим, что из расходимость ряда (2) в общем случае не следует расходимость ряда (1).

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

Для решения вопроса об абсолютной или условной сходимости знакочередующегося ряда необходимо рассмотреть ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда.

Если при исследовании этого ряда с помощью одного из признаков сходимости (признака Даламбера, признака сравнения рядов) ряд окажется сходящимся, то данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно; если же ряд окажется расходящимся, то знакочередующийся ряд сходится условно.

Примеры

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n} + \ldots;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n}{2n-1} = 1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n}{2n-1} + \ldots;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} + \ldots;$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$

Решение: 1) Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Следовательно, согласно признаку Лейбницу, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, который, как, известно, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

2) Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают $1 > \frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{4}{7} > \dots$, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$. Ряд расходится, так как признак Лейбница не выполняется.

3) Используя признак Лейбница, получим $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \dots$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, то есть ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$. Это геометрический ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ $\left(q = \frac{1}{2}\right)$, который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

4) Используя признак Лейбница, имеем $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то есть ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного рада: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$, или $1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \dots$. Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $p = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, данный ряд сходится условно.

Задания для самостоятельной работы

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{4n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{6n-1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$.

2. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(3n-1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(4n-1)^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{2n+1}{2^n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{1}{(3n+1)^2}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой ряд называется знакопеременным?
2. Какой ряд называется знакочередующимся?
3. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующихся рядов.
4. Какой ряд называется абсолютно сходящимся, условно сходящимся?
5. Какие признаки используются для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда?

Исследование сходимости знакочередующихся и степенных рядов

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$
2. $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$
3. $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{18n+7}$
4. $u_n = (-1)^n\dfrac{2^n}{3^n(n+1)}$
5. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{e^{n^3}}$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n^2\cdot 2^{2n}}{(5n-4)^n}$

2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n!}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x-1)^n}{n\cdot 3^n}$

4. Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

5. При каких значениях *x* ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ сходится?

6. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-2)^n}{n^2}$.

Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y, y'') = 0,\ F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. *Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y)\cdot$$

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции от x, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. В частности $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uz$, где u и z - новые функции от x.

Примеры

Задание 1: Найдите общее решение уравнения $x\cdot\left(1+y^2\right)dx = ydy$.

Решение: Разделив переменные, имеем $xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$. Интегрируем обе части полученного уравнения:

$\int xdx = \int\frac{ydy}{1+y^2}$; $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) + \frac{1}{2}\ln C\cdot$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln\left[C\cdot\left(1+y^2\right)\right]$.

Это и есть общее решение данного уравнения.

Задание 2: Найти частное решение уравнения $s\cdot tg\,t\,dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

Решение: Разделив переменные, имеем $tg\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$\int tg\,t\,dt + \int\frac{ds}{s} = \ln C$; $\qquad -\ln\cos t + \ln s = \ln C$,

или

$\ln s = \ln C + \ln\cos t$, $\qquad s = C\cos t$.

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = \frac{\pi}{3}$ и $s = 4$ в выражение для общего решения: $4 = C\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда $C = 8$.Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8\cos t$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите общее решение уравнений:

1) $x^2dx = 3y^2dy$; 2) $\sqrt{x}dy = \sqrt{y}dx$; 3) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$;

4) $(1+y)dx = (x-1)dy$; 5) $xydx = (1+x^2)dy$;

6) $y^2dx + (x-2)dy = 0$; 7) $x^2dy - (2xy+3y)dx = 0$;

8) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $ydy = xdx$; $y = 4$ при $x = -2$;

2) $xdy = ydx$; $y = 6$ при $x = 2$;

3) $ds = (3t^2 - 2t)dt$; $s = 4$ при $t = 2$;

4) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$; $y = 2$ при $x = 0$;

5) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; $y = 4$ при $x = -2$;

6) $(1+y)dx = (1-x)dy$; $y = 3$ при $x = -2$;

7) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$; $y = 1$ при $x = 1$.

3. Найдите общие решения уравнения:

1) $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$; 2) $\frac{dy}{dx} = y + 1$;

3) $x\frac{dy}{dx} - x^2 + 2y = 0$; 4) $\frac{dy}{dx} + xy = x$;

5) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$; 6) $\frac{dy}{dx} - y\,ctgx = \sin x$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется *мнимой единицей*.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Представление комплексного числа в виде $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$, называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Произведение комплексных чисел $z_1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Частное комплексных чисел $z_1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$$\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

При возведении комплексного числа $r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в n-ую степень используется формула

$$\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in Z,$$

которая называется ф о р м у л о й М у а в р а .

Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ используется формула

$$z_k=\sqrt[n]{r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k=0,1,2,...,n-1$.

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в показательной форме, выполняются по следующим формулам:

1. $r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1\cdot r_2e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$;
2. $\dfrac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$;
3. $\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi}$;
4. $\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}$, где $k=0,1,2,...,n-1$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите произведение:

1) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right]$;

2) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

3) $(\cos 5+i\sin 5)\cdot(\cos 2+i\sin 2)$;

4) $\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

5) $\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

2. Выполните деление в тригонометрической форме:

1) $3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

2) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]:\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

3) $8\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]:4\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$;

4) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]:\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

3. Найдите:

1) e^i; 2) $e^{i\pi}$; 3) e^{1+i}; 4) $e^{\frac{i\pi}{2}}$;

5) $e^{\frac{i\pi}{3}}$; 6) e^{4+3i}; 7) e^{2-i}; 8) e^{3i-2}.

4. Дано $z_1=2e^{-i}$; $z_2=\frac{1}{2}e^{0,5i}$. Найдите

1) $z_1 z_1$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^3.

5. Решите уравнения:

1) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$;

2) $z^2 - 4iz + 6(2-5i) = 0$;

3) $z^2 - (8+3i)z + 13(1+i) = 0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа называются комплексно – сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
5. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
6. Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?
7. По какой формуле извлекается корень n-ой степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме?
8. Как записывается комплексное число в показательной форме?
9. Что называется тождеством Эйлера?
10. Какие действия выполняются над комплексными числами, заданными в показательной форме? Запишите формулы.

Теория вероятностей и элементы математической статистики

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Пример. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Пример. В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Пример. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Пример. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Задания для самостоятельной работы

Пример. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

Пример. В первой коробке содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй коробке 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой коробки наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Пример. Имеется пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки.

Пример. Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3, 0,4, 0,5.

Пример. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, или нет. Вероятности приема сигналов равны соответственно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Определить вероятность приема трех радиосигналов.

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой и второй партий извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей.

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой партии извлекаются наугад 5 деталей, а из второй – 7 деталей. Эти детали образуют новую партию. Какова вероятность достать из них бракованную деталь?

Пример. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что эти шары не одного цвета.

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Пример. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

Пример 1. Найти эмпирическую функцию по заданному распределению выборки:

x_i	1	5	8
n_i	10	15	25

Решение:

Найдем объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Наименьшая варианта равна единице, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$.

Значение $X < 5$, а именно $x_1 = 1$, наблюдалось 10 раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2$ при $1 < x \le 5$.

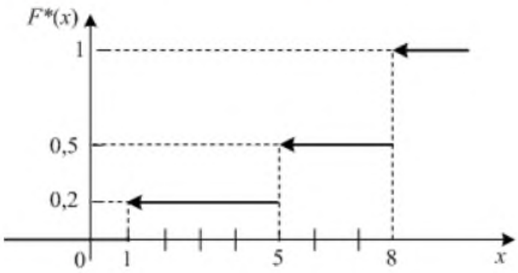
Значения $x < 8$, а именно: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$, наблюдались $10 + 15 = 25$ раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5$ при $5 < x \le 8$.

Так как $x = 8$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 8$.

Напишем искомую эмпирическую функцию:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 1 < x \le 5, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 5 < x \le 8, \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке.



Пример 2. Данные о количестве пациентов кардиологического отделения Демидовской больницы приведены в таблице.

62	54	84	59	75	43	49	89	28	49
40	53	18	18	55	51	26	68	76	65
43	39	47	65	55	29	33	42	51	95
85	46	45	42	48	6	73	54	70	56
69	66	33	100	58	42	89	41	36	72
54	50	54	45	48	11	62	33	32	61
36	31	84	61	26	53	64	50	66	63
77	31	84	61	26	53	64	50	66	63
9	30	69	60	9	30	4	27	74	62
19	42	55	79	77	31	92	30	39	96

Найти эмпирическую функцию распределения по данным выборки.

Пример 1. Предположим, что цены на ценные бумаги широко колеблются. Инвестор, который покупает акции по низкой цене, а продает по высокой, имеет хороший доход. Однако если цены на акции падают ниже стоимости, по которой инвестор купил, то он теряет доход. Чтобы оценить меру риска, инвестор может использовать коэффициент вариации и среднеквадратическое отклонение. Какую информацию о степени риска может дать коэффициент вариации по сравнению со среднеквадратическим отклонением?

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине:

Технические и программные средства

1. Компьютерные классы,
2. Интегрированный пакет MS Office.

Основная литература

1. Шабунин М.И., Математика 2012, БИНОМ. Лаборатория знаний www.iprbookshop.ru
2. Дадаян А.А. Математика. Учебник.М. 2013.
3. Математика: Уч. / А.А. Дадаян. - 3 изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 544 с. (Проф. обр.)

Дополнительная литература

3. Математика: Уч. пос./ Н.А. Березина - М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 175 с.
4. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. Уч\пос.М.2013
5. Березина Н.А. Математика. Уч\пос М. ИНФРА-М,2013
6. Беликова Г.И., Математика. Часть 1. 2012, Российский государственный гидрометеорологический университетwww.iprbookshop.ru
7. Беликова Г.И., Математика. Часть 2. 2012, Российский государственный гидрометеорологический университет www.iprbookshop.ru

Ресурсы INTERNET

http://www./ict.edu.ru/lib/- Информационно- коммуникационные технологии в образовании, система федеральных образовательных порталов.
www.iqlib.ru – электронная библиотека

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

В результате изучения дисциплины «Б1.Б.05 Математика» обучающийся, в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) вырабатывает следующие компетенции:

а) общекультурными (ОК)

– способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);

б) общепрофессиональные компетенции (ОПК)

– сспособностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ОПК-3)

7.2. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Контроль и оценка результатов освоения учебной дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий и выполнения обучающимися индивидуальных занятий

Результаты обучения	**Компетенции**	**Формы и методы контроля и оценки результатов обучения**	**Темы**
Знать – основные понятия и утверждения аналитической геометрии, векторной и линейной алгебры; – основные понятия и утверждения теории пределов функции одной и функции нескольких переменных; – основные понятия и утверждения дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных; – основные понятия и утверждения теории обыкновенных дифференциальных уравнений; – основные понятия и утверждения теории числовых и функциональных рядов; – основные понятия и утверждения комбинаторики; – основные понятия и утверждения теории вероятностей.	ОК-7 ОПК-3	устный опрос	1-4
Уметь – решать системы линейных алгебраических уравнений; – аналитически описывать геометрические объекты при решении задач; – решать задачи с применением дифференциального исчисления; – решать задачи с применением интегрального исчисления; – решать экстремальные задачи для функций одной и нескольких переменных;	ОК-7 ОПК-3	письменный опрос, выполнение практических и индивидуальных заданий	1-4

– решать задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям и системам дифференциальных уравнений; – использовать вероятностные методы решения задач.			
Владеть – основными методами аналитического решения геометрических задач; – основными методами дифференцирования; – основными методами интегрирования функций; – основными методами поиска экстремума функций одной и нескольких переменных; – основными аналитическими методами решения алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений; – основными аналитическими методами решения дифференциальных уравнений и их систем; – основными методами построения вероятностных моделей прикладных задач менеджмента.	ОК-7 ОПК-3	письменный опрос, выполнение практических и индивидуальных заданий	1-4

7.3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, а также шкал оценивания

7.3.1. Перечень оценочных средств сформированности компетенций

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Вид комплектации оценочным средством в ФОС
1.	Устный ответ	Средство контроля на практическом занятии, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Комплект вопросов для устного опроса обучающихся. Перечень вопросов к семинару. Задания для практического занятия. Вопросы для самостоятельного изучения. Вопросы по темам/разделам дисциплины.
2.	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.	Перечень тем для контрольных работ. Комплект контрольных заданий по вариантам.
3.	Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий.

Оценивание сформированности компетенций происходит при устных ответах, а также при выполнении письменных заданий.

7.3.2. Уровневая шкала показателей сформированности компетенций

При освещении оценочных средств по предмету преподаватель оценивает степень сформированности у обучающихся необходимых компетенций по следующей уровневой таксономической шкале, предложенной Б. Блумом (США) и проф. М.В. Клариным:

1 уровень - Знание

Этот уровень обозначает запоминание и воспроизведение изученного материала. Речь может идти о различных видах содержания - от конкретных фактов до целостных теорий. Общая черта этой категории - припоминание соответствующих сведений. Обучающийся: знает (запоминает и воспроизводит) употребляемые термины; знает конкретные факты; знает методы и процедуры; знает основные понятия; знает правила и принципы.

2 уровень - Понимание

Показателем способности понимать значение изученного может служить преобразование (трансляция) материала из одной формы выражения в другую - его «перевод» с одного «языка» на другой (например, из словесной формы - в математическую). В качестве показателя понимания может также выступать интерпретация материала обучающимся (объяснение, краткое изложение) или же предположение о дальнейшем ходе явлений, событий (предсказание последствий, результатов). Такие учебные результаты превосходят простое запоминание материала.

Обучающийся: понимает факты, правила и принципы; интерпретирует словесный материал, схемы, графики, диаграммы; преобразует словесный материал в математические выражения; предположительно описывает будущие последствия, вытекающие из имеющихся данных.

3 уровень - Применение

Этот уровень обозначает умение использовать изученный материал в конкретных условиях и в новых ситуациях. Сюда входят применение правил, методов, понятий, законов, принципов, теорий. Соответствующие результаты обучения требуют более высокого уровня владения материалом, чем понимание. Обучающийся: использует понятия и принципы в новых ситуациях; применяет законы, теории в конкретных практических ситуациях; демонстрирует правильное применение метода или процедуры.

4 уровень - Анализ

Этот уровень обозначает умение разбить материал на составляющие части так, чтобы ясно выступала его структура. Сюда относятся вычленение частей целого, выявление взаимосвязей между ними, осознание принципов организации целого. Обучающийся: выделяет скрытые (неявные) предположения; видит ошибки и упущения в логике рассуждений; проводит разграничения между фактами и следствиями; оценивает значимость данных.

5 уровень - Синтез

Этот уровень обозначает умение комбинировать элементы так, чтобы получить целое, обладающее новизной. Таким новым продуктом может быть сообщение (выступление, доклад), план действий, схемы, упорядочивающие имеющиеся сведения.

Достижение соответствующих учебных результатов предполагает деятельность творческого характера, направленную на создание новых схем, структур. Обучающийся: пишет небольшое творческое сочинение; предлагает план проведения эксперимента; использует знания из различных областей, чтобы составить план решения той или иной проблемы.

6 уровень - Оценка

Этот уровень обозначает умение оценивать значение того или иного материала (утверждения, художественного произведения, исследовательских данных и т. д.). Суждения обучающегося должны основываться на чётких критериях: внутренних (структурных, логических) или внешних (соответствие намеченной цели). Критерии могут определяться самим обучающимся или предлагаться ему извне, например, преподавателем.

Этот уровень предполагает достижение учебных результатов всех предшествующих категорий. Обучающийся:

– оценивает логику построения материала в виде письменного текста;

– оценивает соответствие выводов имеющимся данным, значимость того или иного продукта деятельности, исходя из внутренних критериев;

– оценивает значимость того или иного продукта деятельности, исходя из внешних критериев.

Оценка “**отлично**” ставится, если обучающийся:

– показывает глубокое и полное знание и понимание всего объёма программного материала; полное понимание сущности рассматриваемых понятий, явлений и закономерностей, теорий, взаимосвязей;

– умеет составить полный и правильный ответ на основе изученного материала; выделять главные положения, самостоятельно подтверждать ответ конкретными примерами, фактами; самостоятельно и аргументировано делать анализ, обобщения, выводы. Устанавливать межпредметные (на основе ранее приобретенных знаний) и внутрипредметные связи, творчески применять полученные знания в незнакомой ситуации. Последовательно, чётко, связно, обоснованно и безошибочно излагать учебный материал; давать ответ в логической последовательности с использованием принятой терминологии; делать собственные выводы; формулировать точное определение и истолкование основных понятий, законов, теорий; при ответе не повторять дословно текст учебника; излагать материал литературным языком; правильно и обстоятельно отвечать на дополнительные вопросы педагога. Самостоятельно и рационально использовать наглядные пособия, справочные материалы, учебник, дополнительную литературу, первоисточники; применять систему условных обозначений при ведении записей, сопровождающих ответ; использование для доказательства выводов из наблюдений и опытов;

– самостоятельно, уверенно и безошибочно применяет полученные знания в решении проблем на творческом уровне; допускает не более одного недочёта, который легко исправляет по требованию педагога; имеет необходимые навыки работы с приборами, чертежами, схемами и графиками, сопутствующими ответу; записи, сопровождающие ответ, соответствуют требованиям.

Оценка “**хорошо**” ставится, если обучающийся:

– показывает знания всего изученного программного материала. Даёт полный и правильный ответ на основе изученных теорий; незначительные ошибки и недочёты при воспроизведении изученного материала, определения понятий дал неполные, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях из наблюдений и опытов; материал излагает в определенной логической последовательности, при этом допускает одну негрубую ошибку или не более двух недочетов и может их исправить самостоятельно при требовании или при небольшой помощи преподавателя; в основном усвоил учебный материал; подтверждает ответ конкретными примерами; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя;

– умеет самостоятельно выделять главные положения в изученном материале; на основании фактов и примеров обобщать, делать выводы, устанавливать внутрипредметные связи. Применять полученные знания на практике в видоизменённой ситуации, соблюдать основные правила культуры устной речи и сопровождающей письменной, использовать научные термины;

– не обладает достаточным навыком работы со справочной литературой, учебником, первоисточниками (правильно ориентируется, но работает медленно). Допускает негрубые нарушения правил оформления письменных работ.

Оценка “**удовлетворительно**” ставится, если обучающийся:

– усвоил основное содержание учебного материала, имеет пробелы в усвоении материала, не препятствующие дальнейшему усвоению программного материала;

– материал излагает несистематизированно, фрагментарно, не всегда последовательно;

– показывает недостаточную сформированность отдельных знаний и умений; выводы и обобщения аргументирует слабо, допускает в них ошибки;

– допустил ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определения понятий дал недостаточно четкие;

– не использовал в качестве доказательства выводы и обобщения из наблюдений, фактов, опытов или допустил ошибки при их изложении;

– испытывает затруднения в применении знаний, необходимых для решения задач различных типов, при объяснении конкретных явлений на основе теорий и законов, или в подтверждении конкретных примеров практического применения теорий;

– отвечает неполно на вопросы преподавателя (упуская и основное), или воспроизводит содержание текста учебника, но недостаточно понимает отдельные положения, имеющие важное значение в этом тексте;

– обнаруживает недостаточное понимание отдельных положений при воспроизведении текста учебника (записей, первоисточников) или отвечает неполно на вопросы преподавателя, допуская одну-две грубые ошибки.

Оценка “**неудовлетворительно**” ставится, если обучающийся:

– не усвоил и не раскрыл основное содержание материала;
– не делает выводов и обобщений.
– не знает и не понимает значительную или основную часть программного материала в пределах поставленных вопросов;
– имеет слабо сформированные и неполные знания и не умеет применять их к решению конкретных вопросов и задач по образцу;
– при ответе (на один вопрос) допускает более двух грубых ошибок, которые не может исправить даже при помощи педагога.

Оценка письменных работ

Оценка “отлично” ставится, если обучающийся:

– выполнил работу полностью, без ошибок и недочетов;
– объем ЗУНов составляет 90-100% содержания.

Оценка “хорошо” ставится, если обучающийся:

– выполнил работу полностью, но допустил в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета или не более трех недочетов;
– объем ЗУНов составляет 70-90% содержания.

Оценка “удовлетворительно” ставится, если обучающийся:

– правильно выполнил не менее половины работы или допустил не более двух грубых ошибок;
– допустил не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;
– допустил не более трех негрубых ошибок;
– одной негрубой ошибки и трех недочетов;
– при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов;
– владеет ЗУНами в объеме 50-70% содержания.

Оценка “неудовлетворительно” ставится, если обучающийся:

– допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка “3”;
– или если правильно выполнил менее половины работы;
– объем ЗУНов учащегося менее 50% содержания.

7.3.3. Оценивание качества устного ответа при промежуточной аттестации обучающегося

Уровень знаний, умений и навыков обучающегося при устном ответе во время промежуточной аттестации определяется оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» по следующим критериям:

Оценка «**отлично**» ставится, если:

- полно раскрыто содержание материала;
- материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности;
- продемонстрировано системное и глубокое знание программного материала;
- точно используется терминология;
- показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации;
- продемонстрировано усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость компетенций, умений и навыков;
- ответ прозвучал самостоятельно, без наводящих вопросов;

- продемонстрирована способность творчески применять знание теории к решению профессиональных задач;
- продемонстрировано знание современной учебной и научной литературы;
- допущены одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов, которые исправляются по замечанию.

Оценка «**хорошо**» ставится, если:

- вопросы излагаются систематизированно и последовательно;
- продемонстрировано умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер;
- продемонстрировано усвоение основной литературы.
- ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков:
- в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие содержание ответа;
- допущены один - два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя;
- допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя.

Оценка «**удовлетворительно**» ставится, если:

- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала;
- усвоены основные категории по рассматриваемому и дополнительным вопросам;
- имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после нескольких наводящих вопросов;
- при неполном знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность компетенций, умений и навыков, обучающийся не может применить теорию в новой ситуации;
- продемонстрировано усвоение основной литературы.

Оценка «**неудовлетворительно**» ставится, если:

- не раскрыто основное содержание учебного материала;
- обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала;
- допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов.
- не сформированы компетенции, умения и навыки.

Показатели для оценки устного ответа в привязке к компетенциям и шкале оценивания приведены в нижеследующей таблице:

№	Показатели оценивания	Коды компетенций, проверяемых с помощью показателей	Шкала оценивания
1.	Обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускает грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на задаваемые комиссией вопросы или затрудняется с ответом; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой	ОК-7 ОПК-3	Неудовлетворительно
2	Обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей	ОК-7 ОПК-3	Удовлетворительно

	профессиональной деятельности; при ответе на вопросы билета и дополнительные вопросы не допускает грубых ошибок, но испытывает затруднения в последовательности их изложения; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне		
3	Обучающийся показывает полное знание программного материала, основной и дополнительной литературы; дает полные ответы на теоретические вопросы билета и дополнительные вопросы, допуская некоторые неточности; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой	ОК-7 ОПК-3	Хорошо
4	Обучающийся показывает всесторонние и глубокие знания программного материала, знание основной и дополнительной литературы; последовательно и четко отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы; уверенно ориентируется в проблемных ситуациях; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании программного материала; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой	ОК-7 ОПК-3	Отлично

7.4. Типовые задания и иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

№	Компетенции	Оценочные средства	
1	- способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-6);	1 этап формирования компетенции	Тесты по всем темам дисциплины. Тематика докладов. Тематика рефератов. Варианты контрольных работ. Перечень дискуссионных тем.
		2 этап формирования компетенции	Экзаменационные вопросы.
2	- способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы	1 этап формирования компетенции	Тесты по всем темам дисциплины. Тематика докладов. Тематика рефератов. Варианты контрольных работ. Перечень дискуссионных тем.
		2 этап формирования компетенции	Экзаменационные вопросы.

Промежуточная аттестация является обязательной по дисциплине «Методы оптимальных решений».

Промежуточная аттестация по дисциплине позволяет оценить степень восприятия учебного материала и проводится для оценки результатов изучения разделов/тем дисциплины.

Формами контроля знаний обучающихся по данной дисциплине являются две контрольные работы, тест и экзамен.

Формой итогового контроля знаний обучающихся является устный экзамен, в ходе которого оценивается уровень теоретических знаний и навыки решения задач оптимального управления.

Экзамен по данной дисциплине проводится в письменной форме по традиционной системе (два вопроса и задача).

Оценку «отлично» обучающийся получает, если ответ на поставленный вопрос по существу правилен и полон и верно решена задача;

Оценку «хорошо» - если ответ на поставленный вопрос по существу правилен, но недостаточно полно изложен с несущественными по смыслу ошибками;

Оценку «удовлетворительно» - если ответ на поставленный вопрос в основном правилен, но изложен неполно или с отдельными существенными ошибками;

Оценку «неудовлетворительно» - если ответ не раскрывает существа поставленного вопроса и не верно решена задача.

Ниже приводятся вопросы к экзамену и варианты двух контрольных работ и примерные вопросы тестового контроля.

Текущая аттестация может проводиться в форме тестирования, выполнения самостоятельных и контрольных работ.

Контрольные (самостоятельные) работы

Тематика заданий к самостоятельным и контрольной работам установлена в соответствии с Паспортом фонда оценочных средств.

Образцы контрольных работ

Элементы аналитической геометрии

1. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A\,(2;\,-1),\ B\,(5;\,-5),\ C\,(8;\,-5)$. Найдите:

1) координаты вектора $\overline{AB}$;
2) длину стороны AB ;
3) координату точки M — середины отрезка AC ;
4) длину медианы BM ;
5) координаты вектора $\overline{3AB - 2BC}$;
6) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$;
7) треугольник ABC достроили до параллелограмма $ABCD$; найдите координату вершины D.

Решив задания 1 — 6 и заменив получившиеся ответы буквами из таблицы, вы узнаете, какой профессии были отданы три года жизни создателя аналитической геометрии Рене Декарта (1596-1650).

Профессия:

1	2	3	4	5	6

Карта ответов:

Е	И	Й	Н	О	Р	У	Ф	Ц	Ч	Ы
(3;-12)	(5;-3)	(-3;4)	1	(3;-4)	0,6	$\sqrt{5}$	5	2	(10;-6)	-0,2

2. При каком значении m векторы $\bar{a} = (-4; 1)$ и $\bar{b} = (m; -2)$
а) взаимно перпендикулярны; б) коллинеарны.
3. Докажите, что $ABCD$, где $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$, $C(4; -1)$, $D(-2; -3)$ — трапеция с основаниями AB и CD. Определите, является ли трапеция равнобокой. На оси OX найдите координаты точки, равноудаленной от точек A и B.
4. Даны точки $A(4;-3)$, $B(-2;-9)$.
Найти: 1) координаты вектора $\overline{AB}$;
2) длину вектора $\overline{AB}$;
3) координаты точки M — середины AB.
5. Даны $a = (3; -5)$, $b = 4\bar{i} + \bar{j}$.
Найдите: 1) $2\bar{a} - 3\bar{b}$; 2) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 3) $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$
6. При каком значении n векторы $\bar{a} = (1; n)$, $\bar{b} = (-2; 8)$
1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
7. Опираясь на обобщающие таблицы, изучите, какими способами можно задать прямую, и какие виды уравнения прямой существуют.
8. В треугольнике ABC заданы координаты вершин $A(-5; 3)$, $B(2; -1)$, $C(6; 3)$. Составьте уравнение:
а) прямой AB;
б) медианы AM;
в) прямой, проходящей через точку B параллельно AC;
г) прямой, проходящей через точку C с угловым коэффициентом $k=3$.
9. $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD, в которой $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$, $C(4; -1)$, $D(-2; -3)$.
Составьте уравнение:
а) диагонали AC в каноническом виде;
б) прямой, параллельной основаниям, проходящей через точку $K(-3; -1)$ в параметрическом виде;
в) прямой, проходящей через точку B и образующей с положительным направлением оси OX угол 45° (вид уравнения прямой — с угловым коэффициентом);
г) средней линии трапеции в каноническом виде;
д) прямой, проходящей через точку C параллельно прямой $y = -2x + 4$.
10. Запишите уравнение прямой во всех видах (общем, каноническом, параметрическом, с угловым коэффициентом) и постройте эту прямую:
а) $\dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y+2}{4}$; б) $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = -3 - t. \end{cases}$
11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$ и имеющей направляющий вектор $a = (-5; 3)$ в каноническом и параметрическом виде.
12. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(7; 5)$.
13. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3; 2)$ и образующей с положительным направлением оси OX угол $\dfrac{\pi}{4}$.
14. Выучите определения окружности, эллипса, параболы, гиперболы. Используя обобщающую таблицу, проанализируйте, с помощью каких уравнений задаются кривые второго порядка, каковы основные параметры каждой линии.
15. Определите вид кривой второго порядка и постройте ее:
а) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$; б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$; г) $y^2 = 6x$.
16. Составьте уравнение кривой второго порядка по следующим условиям:

а) уравнение окружности с центром в точке $O(-2;\,5)$ и радиусом 3;
б) уравнение окружности с центром в точке $O(1;\,-2)$, проходящей через точку $A(4;\,-6)$;
в) уравнения эллипса, большая полуось a которого равна 3, малая полуось b равна 1;
г) уравнение гиперболы, действительная полуось a которой равна 6, мнимая полуось b равна 2;
д) уравнение параболы, имеющей фокус в точке (1; 0);
е) уравнение параболы, уравнение директрисы которой имеет вид $x = 1$.

17. Определите вид кривой второго порядка и постройте ее:

а) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$; б) $4x^2 + 9y^2 = 36$; в) $\dfrac{3x^2}{5} - \dfrac{5y^2}{3} = 15$; г) $x^2 + 16y = 0$.

18. Составьте уравнение окружности с центром $O(3;\,-2)$ и радиусом $r = 5$.

19. Постройте эллипс, заданный уравнением $6x^2 + y^2 = 32$.

20. Постройте гиперболу, заданную уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$.

21. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2=8x$ и постройте её.

Элементы линейной алгебры

1. Транспонируйте матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдите сумму и разность матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найдите произведение матрицы A на число $k = 3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

4. Найдите произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

6. Выучите, какими основными свойствами обладает определитель.

7. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. Используя свойства определителей, найдите определитель:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -100 & 0 & 50 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

8. Найдите миноры и алгебраические дополнения элементов второй строки определителя $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

9. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} \log_3 12 & \log_3 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

10. Решите уравнение и неравенство:

а) $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} \langle 0$.

11. Найдите определитель $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

12. Найдите определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

13. Найдите миноры и алгебраические дополнения элементов третьего столбца определителя $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

14. Вычислите определитель четвертого порядка: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}$.

Основы математического анализа

1. Выпишите первые пять членов числовой последовательности, классифицируйте данную последовательность по критериям монотонности и ограниченности, найдите её предел:

а) $a_n = \frac{1}{n^2}$; б) $a_n = 2^n + 1$; в) $a_n = 5 + \frac{1}{n}$; ☆г) $a_n = \frac{7+n^2}{2n^2-3n}$.

2. Найдите предел числовой последовательности:

а) $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-n}$; б) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{4n}$; в) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{2n}$; г) $a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)^{-\frac{n}{4}}$.

3. Исследуйте числовую последовательность $a_n = \frac{1}{2^n}$.

4. Исследуйте числовую последовательность $a_n = 3n\text{-}2$.

5. Найдите предел последовательности $a_n = \frac{8n-3}{13-7n}$.

6. Найдите производную функции:

а) $y(x) = 7x^5 + e^x - 14$; б) $y(x) = \frac{1}{x^5} - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 8$; в) $y(x) = 6^x \arcsin x$;

г) $y(x) = 9x^4 \operatorname{tg} x$; д) $y(x) = \frac{3x^2-7}{x+2}$; е) $y(x) = \frac{4x^5+x}{1-\ln x}$.

7. Найдите производную функции в указанной точке:

а) $y(x) = 5x\cos x - 8\sin x$, $x_0 = 0$;

б) $y(x) = \frac{x^2-4}{2-x^5}$, $x_0 = 1$.

8. Найдите дифференциал функции:

а) $y(x) = \frac{\sin x}{3x^2 - 6x}$;

б) $y(x) = (7^x + x)\log_7 x$.

9. Выясните, при каких значениях x производная функции $y(x) = x^3 - 2x^2 + x + \sqrt{15}$ отрицательна.

10. Найдите область определения функции, полученной в результате дифференцирования данной функции: $y(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

11. Найдите производную функции $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 7$.

12. Найдите производную функции $y = \frac{2x^2 + 3}{x - 4}$.

13. Найдите производную функции $y = x \cdot \ln x$ в точке $x_o = e$.

14. Найдите дифференциал функции $y(x) = 3x^2 - \sin x$.

15. Найдите производную сложной функции:

а) $y(x) = e^{\sqrt[5]{x^2}}$; б) $y(x) = \sin 20x$; в) $y(x) = \frac{1}{(3x^4 - 2)^6}$; г) $y(x) = \arccos 9^{5x+2}$;

д) $y(x) = \cos(x^2 \arcsin x)$; е) $y(x) = \ln^4(6 - 10x^3)$; ☆ж) $y(x) = \sqrt[5]{tg^2(\log_2 x + 8)}$.

16. Найдите производную сложной функции в точке:

а) $y(x) = 3^{3 - 2\sin x}, x_0 = 0$; б) $y(x) = \sqrt{x^4 + 8x^2}, x_0 = 1$; ☆в) $y(x) = \ln\frac{8x^2 - 1}{3 - x^2}, x_0 = -1$.

17. Найдите вторую производную функции:

а) $y(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 12$; б) $y(x) = \frac{6x - 7}{x + 4}$; ☆в) $y(x) = (1 + x^2) arcctgx$; ☆г) $y(x) = \cos^5 x$.

18. Найдите третью производную функции:

а) $y(x) = \ln\sqrt[3]{x}$; ☆б) $y(x) = x \cdot 7^x$.

19. Найдите четвертую производную функции $y(x) = \sin 8x$.

20. Выясните, сколько раз нужно продифференцировать функцию $y(x) = (x^2 + 1)^{50}$, чтобы в результате получился многочлен тридцатой степени.

Теория вероятностей и элементы математической статистики

1. В 3-х из 10 проб крови недостаточный уровень гемоглобина. Лаборант для анализа взял четыре пробы. Какова вероятность, что в 2-х из отобранных проб уровень гемоглобина в норме; хотя бы в одной пробе недостаточный уровень гемоглобина?

2. На опытном поле посеяли три семени, вероятность всхожести для них соответственно 0,8; 0,9 и 0,7. Какова вероятность, что взойдут ровно два семени; более одного семени?

3. В трех урнах содержатся белые и черные шары, причем в первой – 3 белых и 1 черный, во второй – 2 белых и 3 черных, в третьей – все шары белые. Из наугад выбранной урны наудачу выбирают 1 шар. Найти вероятности следующих событий: 1) взятый шар окажется белым, 2) шар взят из третьей урны, если известно, что он оказался белым.

4. Из урны, содержащей 5 белых и 4 черных шара, наугад извлекают три. Определить вероятность того, что среди них: ровно один черный; хотя бы один из них черный; все белые.

5. Изделие подвергается четырем видам испытаний. Вероятность того, что изделие выдержит первое испытание, равна 0,9; второе – 0,6; третье – 0,8; четвертое – 0,7. Найти вероятность того, что изделие выдержит более двух испытаний; хотя бы одно испытание.

6. В первой корзине 7 яблок и 9 груш, во второй – 2 яблока и 4 груш, в третьей – 11 яблок и 4 груши. Из наугад выбранной корзины взяли один фрукт. Найти вероятность того, что это груша. Какова вероятность того, что выбранная таким образом груша была в третьей корзине?

7. Вероятность того, что лампа останется исправной в течение месяца, равна 0,9. В коридоре поставили 5 новых ламп. Какова вероятность того, что из строя выйдут три лампы; останутся исправными менее 4-х ламп?
8. На складе имеется 10 кинескопов, 6 из них изготовлены заводом N. Найти вероятность того, что среди 4-х наудачу взятых кинескопов: окажется не менее трѐх, изготовленных заводом N, хотя бы один изготовлен заводом N.
9. По мишени производят три выстрела. Вероятности попадания в мишень при каждом выстреле соответственно равны 0,4; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что в мишени будут ровно одна пробоина; хотя бы одна пробоина; мишень не будет поражена.
10. На двух станках обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака для станка № 1 равна 0,07, для станка № 2 – 0,06. Обработанные детали собирают в одном месте, причем со станка № 1 втрое больше, чем со станка № 2. Вычислить вероятность того, что наудачу взятая деталь будет без дефекта.
11. В среднем 10% станков нуждаются в регулировке. Какова вероятность того, что из шести станков хотя бы один нуждается в регулировке?
12. В ящике 10 деталей, из которых 3 дефектных. Наугад извлекают 2 детали. Построить ряд распределения случайной величины ξ - количества дефектных деталей среди извлеченных, а также функцию распределения, и ее график.
13. С.в. ξ имеет нормальное распределение с $m=4$ и $\sigma=2$. Выписать плотность вероятности, построить график, найти $P(3< \xi < 4)$, соответствующую область под графиком заштриховать.
14. Дана выборка: 8;4;3;4;6;9;7;2;2;9;4;3;3;5;7;7;2;7;3;3;5;6;6;4;8. По результатам обследования выборки определить: а) величину, которую следует принять за среднюю генеральной совокупности; б) величину, которую следует принять за дисперсию генеральной совокупности; в) доверительный интервал для генеральной средней, если доверительная вероятность ß = 0,95. Выборка значений случайной величины:

15. Варианты: №	Выборочные значения
1	3 9 6 2 5 7 6 6 3 3 4 8 8 5 2 4 3 4 8 8 6 5 8 9 2
2	6 6 6 8 9 9 5 4 4 8 2 5 5 6 6 5 9 8 9 3 6 8 7 5 9
3	4 7 9 4 3 3 7 6 9 6 6 8 6 2 8 3 5 2 2 4 3 7 5 8 4
4	6 8 3 3 7 8 6 5 9 2 2 4 8 5 9 2 5 9 2 2 4 2 8 8 6
5	2 7 4 4 6 9 8 9 4 5 6 3 2 6 2 6 8 4 2 6 8 9 3 5 8
6	6 3 7 9 3 8 7 8 2 9 3 3 8 9 7 5 5 8 7 5 2 3 6 9 9
7	2 5 5 4 2 6 4 9 2 7 2 6 2 9 2 8 9 7 6 4 6 8 7 9 2
8	3 8 9 6 2 5 5 2 2 8 4 9 4 2 3 2 6 5 2 3 4 3 5 4 7
9	4 9 4 3 9 5 4 3 4 2 4 2 8 7 7 5 7 7 6 5 3 2 4 2 5
0	8 7 5 8 4 2 6 6 9 3 9 6 7 8 6 7 3 2 5 3 2 8 4 6 8

По результатам обследования выборки определить: а) величину, которую следует принять за среднюю генеральной совокупности; б) величину, которую следует принять за дисперсию генеральной совокупности; в) доверительный интервал для генеральной средней, если доверительная вероятность ß = 0,95.

Перечень вопросов для итогового контроля

1. Комплексные числа. Операции с комплексными числами.
2. Комплексно-сопряженные числа.
3. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация.
4. Возведение в степень комплексного числа. Корни из комплексных чисел.
5. Матрица. Операции над матрицами, свойства операций.
6. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице.
7. Алгоритм вычисления обратной матрицы. Свойства для невырожденных матриц
8. Определитель матрицы. Теорема об определителе произведения матриц.

9. Алгебраические дополнения и минор матрицы. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.
10. Система линейных уравнений. Основные понятия и определения.
11. Методы решения систем линейных уравнений: метод обратной матрицы, метод Гаусса, метод Крамера.
12. Арифметическое n - мерное векторное пространство. Векторы. Сумма и произведение векторов. Свойства операций над векторами.
13. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и ранг системы векторов. Скалярное произведение векторов и их свойства. Вычисление угла между векторами.
14. Признак перпендикулярности векторов.
15. Векторное произведение векторов и его свойства. Геометрический смысл. Смешанное произведение. Геометрический смысл. Вычисление в декартовых координатах.
16. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой «в отрезках».
17. Первая и вторая теоремы сходимости числовых рядов.
18. Признаки сходимости числовых рядов, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши сходимости числовых рядов.
19. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.
20. Степенные ряды: определение, радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.
21. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.
22. Понятие функции многих переменных. Основные понятия. Область определения функции многих переменных. Линии уровня.
23. Предел и непрерывность функции многих переменных.
24. Частные производные первого, второго и высших порядков. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
25. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
26. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости.
27. Производная по направлению, градиент.
28. Функция, заданная неявно, ее частные производные.
29. Касательная плоскость и нормаль к поверхности S.
30. Экстремумы функции многих переменных. Определение, необходимое условие существования.
31. Экстремумы функции многих переменных. Определение, достаточное условие существования.
32. Наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных (свойства функций непрерывных в ограниченной замкнутой области).
33. Условные экстремумы. Понятие о методе множителей Лагранжа.
34. Понятия дифференциального уравнения, общего и частного решения, интегральной кривой, изоклины, начальных условий.
35. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема Коши.
36. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
37. Однородные дифференциальные уравнения.
38. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: определение, способы интегрирования (метод вариации произвольной постоянной).
39. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка: определение, способы интегрирования (метод Бернулли).
40. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.
41. Дифференциальные уравнения высших порядков.
42. Уравнения, допускающие понижения порядка.
43. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения.
44. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
45. Характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения.

46. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: определение, свойства решений, способы интегрирования (метод вариации произвольных постоянных).
47. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: определение, свойства решений, способы интегрирования (метод по виду правой части).
48. Элементы комбинаторики. Правила сложения и умножения.
49. Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Операции над событиями. Алгебра событий.
50. Случайное событие, вероятность (классическое и аксиоматическое определения).
51. Случайное событие, вероятность (статистическое, геометрическое определения вероятности).
52. Свойства вероятности. Расширенная теорема сложения вероятностей.
53. Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Полная группа событий. Умножение вероятностей.
54. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.
55. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число.
56. Теорема Пуассона. Локальная предельная теоремы Муавра- Лапласа. Интегральная предельная теоремы Муавра-Лапласа.
57. Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Операции над случайными величинами.
58. Функция распределения. Свойства функции распределения.
59. Плотность вероятности случайной величины и ее свойства.
60. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.
61. Дисперсия случайной величины, ее свойства.
62. Дискретные случайные величины. Численные характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение (СКО), мода).
63. Непрерывные случайные величины. Численные характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение (СКО), мода, медиана).
64. Основные законы распределения случайных величин (классификация и характерные параметры). Биномиальный закон распределения, геометрический закон распределения и закон распределения Пуассона.
65. Основные законы распределения случайных величин (классификация и характерные параметры). Равномерный закон распределения и показательный закон распределения.
66. Нормальный закон распределения. Свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону.
67. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный промежуток. Правило «трех сигм».
68. Вариационные ряды и их характеристики.
69. Средние величины вариационного ряда. Показатели вариации.
70. Начальные и центральные моменты вариационного ряда. Выборочный метод.
71. Задачи линейного программирования. Графический метод решения.
72. Транспортная задача.

7.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

7.5.1. Сводный перечень обобщенных критериев оценки разных форм контроля

Оценка знаний, умений, навыков может быть выражена в параметрах:

– «очень высокая», «высокая», соответствующая академической оценке «отлично»; «достаточно высокая», «выше средней», соответствующая академической оценке «хорошо»;

- «средняя», «ниже средней», «низкая», соответствующая академической оценке «удовлетворительно»;
- «очень низкая», «примитивная», соответствующая академической оценке «неудовлетворительно».

Критерии оценивания:

- Полнота знаний теоретического материала;
- Полнота знаний практического контролируемого материала, демонстрация умений и навыков решения типовых задач, выполнения типовых заданий/упражнений;
- Умение извлекать и использовать основную (важную) информацию из заданных теоретических, научных, справочных, энциклопедических источников;
- Умение собирать, систематизировать, анализировать и грамотно использовать информацию из самостоятельно найденных теоретических источников;
- Умение собирать, систематизировать, анализировать и грамотно использовать практический материал для иллюстраций теоретических положений;
- Умение самостоятельно решать проблему/задачу на основе изученных методов, приемов, технологий;
- Умение ясно, четко, логично и грамотно излагать собственные размышления, делать умозаключения и выводы;
- Умение соблюдать заданную форму изложения (доклад, эссе, другое);
- Умение пользоваться ресурсами глобальной сети (интернет);
- Умение пользоваться нормативными документами;
- Умение создавать и применять документы, связанные с профессиональной деятельностью;
- Умение определять, формулировать проблему и находить пути ее решения;
- Умение анализировать современное состояние отрасли, науки и техники;
- Умение самостоятельно принимать решения на основе проведенных исследований; Умение и готовность к использованию основных (изученных) прикладных программных средств;
- Умение создавать содержательную презентацию выполненной работы;
- Другое.

Критерии оценки компетенций:

- Способность к публичной коммуникации (демонстрация навыков публичного выступления и ведения дискуссии на профессиональные темы, владение нормами литературного языка, профессиональной терминологией, этикетной лексикой); Способность эффективно работать самостоятельно;
- Способность эффективно работать в команде;
- Готовность к сотрудничеству, толерантность;
- Способность организовать эффективную работу команды;
- Способность к принятию управленческих решений;
- Способность к профессиональной и социальной адаптации;
- Способность понимать и анализировать социальные, экономические и экологические последствия своей профессиональной деятельности;
- Владение навыками здорового образа жизни;
- Готовность к постоянному развитию;
- Способность использовать широкие теоретические и практические знания в рамках специализированной части какой-либо области;
- Способность демонстрировать освоение методов и инструментов в сложной и специализированной области;
- Способность интегрировать знания из новых или междисциплинарных областей для исследовательского диагностирования проблем;
- Способность демонстрировать критический анализ, оценку и синтез новых сложных идей;
- Способность оценивать свою деятельность и деятельность других;

- Способность последовательно оценивать собственное обучение и определять потребности в обучении для его продолжения;
- Другое.

7.5.2. Средства оценивания для промежуточной и текущей аттестации

Контрольная работа - средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу. Контрольная работа - письменное задание, выполняемое в течение заданного времени (в условиях аудиторной работы - от 30 минут до 2 часов, от одного дня до нескольких недель в случае внеаудиторного задания). Как правило, контрольная работа предполагает наличие определенных ответов.

Критерии оценки выполнения контрольной работы:

- соответствие предполагаемым ответам;
- правильное использование алгоритма выполнения действий (методики, технологии и т.д.);
- логика рассуждений;
- неординарность подхода к решению.

Если задания для контрольной работы берутся из учебника, пособия или другого источника, то его следует указать в ФОС.

Параметры оценочного средства (пример)

Источник (...)	Полное библиографическое описание
Предел длительности контроля	20 мин
Предлагаемое количество задач из одного контролируемого раздела	1-3
Последовательность выборки задач из каждого раздела	случайная
Критерии оценки: - продемонстрирована способность анализировать и обобщать информацию; - продемонстрирована способность синтезировать новую информацию; - сделаны обоснованные выводы на основе интерпретации информации, разъяснения; - установлены причинно-следственные связи, выявлены закономерности;	Максимальное количество баллов - 5
«5» (отлично), если	Задание выполнено полностью
«4» (хорошо), если	Задание выполнено с незначительными погрешностями
«3» (удовлетворительно), если	Обнаруживает знание и понимание большей части задания
«2» (неудовлетворительно), если	Обнаруживает недостаточный уровень знания, непонимание большей части задания

Конспект позволяет формировать и оценивать умения обучающихся по переработке информации.

Параметры оценочного средства (пример)

Тема «Индивидуально-психологические качества личности»	Источник конспектирования, полное биографическое описание
Предел длительности контроля	45 мин.

Критерии оценки: - оптимальный объем текста (не более одной трети оригинала); - логическое построение и связность текста; - полнота/ глубина изложения материала (наличие ключевых положений, мыслей); - визуализация информации как результат ее обработки (таблицы, схемы, рисунки); - оформление (аккуратность, соблюдение структуры оригинала).	мах 5 баллов
«5» (отлично), если	Задание выполнено полностью
«4» (хорошо), если	Задание выполнено с незначи-
«3» (удовлетворительно), если	Обнаруживает знание и пони-
«2» (неудовлетворительно), если	Обнаруживает недостаточный уровень знания, непонимание большей части задания

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Шабунин М.И., Математика 2012, БИНОМ. Лаборатория знаний www.iprbookshop.ru
2. Дадаян А.А. Математика. Учебник.М. 2013.
3. Математика: Уч. / А.А. Дадаян. - 3 изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 544 с. (Проф. обр.)

Дополнительная литература

4. Математика: Уч. пос./ Н.А. Березина - М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 175 с.
5. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. Уч\пос.М.2013
6. Березина Н.А. Математика. Уч\пос М. ИНФРА-М,2013
7. Беликова Г.И., Математика. Часть 1. 2012, Российский государственный гидрометеорологический университетwww.iprbookshop.ru
8. Беликова Г.И., Математика. Часть 2. 2012, Российский государственный гидрометеорологический университет www.iprbookshop.ru

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. http://www.iqlib.ru/

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для обучающихся *заочной формы обучения* лекции и практические занятия, организуемые во время сессий, носят обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения курса, выделить важнейшие понятия, указать главные практические применения. На лекциях могут быть разобраны отдельные вопросы программы. На практических занятиях рассматриваются типовые задания, даётся образец решения варианта контрольной работы с методическими указаниями и рекомендациями по её оформлению и выполнению.

Основным видом учебной работы является самостоятельная работа. Она складывается из чтения учебника, решения задач и выполнения домашней контрольной работы, в процессе рецензирования которой преподавателем осуществляется *текущий контроль успеваемости*.

Типовой расчет содержит индивидуальные задания, выполняемые с необходимыми пояснениями решения и указанием используемых теоретических понятий, определений, теорем и формул. Выполнение ТР контролируется преподавателем. Предварительно проверяется правильность решения задач. Завершающим этапом является защита ТР, во время которой обучающийсядолжен уметь правильно отвечать на вопросы, пояснять решения своих задач. Плановая продолжительность выполнения ТР - текущий семестр.

Целью контрольной работы, выполняемой на практическом занятии в аудитории, является проверка степени усвоения аксиом теории вероятностей, основных теорем и правил сложения и умножения вероятностей случайных событий. Продолжительность контрольной работы - 2 часа.

Контрольная работа обучающихся на заочной форме обучения должна быть решена в соответствии с образцом её выполнения, выданным на практических занятиях. Сроки сдачи контрольной работы на рецензию определяются деканатом.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Основными целями применения ИКТ на занятиях являются:

— повышение мотивации к изучению устного материала дисциплины;

— совершенствование практических умений работы с компьютером;
— увеличение объема знаний современных информационных технологий;
— развитие способности и готовности к дальнейшему самостоятельному обучению.

При проведении лекционных занятий преподавателем и презентации обучающимися результатов работы над проектом используется компьютер и мультимедийный проектор.

При использовании на занятиях групповой работы используется раздаточный материал.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Особенности организации образовательного процесса по образовательной программе для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья осуществляется на основе образовательных программ, адаптированных при необходимости для обучения указанных обучающихся.

Обучение по образовательным программам инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья предусмотрено НЧОУ ВО АЛСИ с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся.

В НЧОУ ВО АЛСИ созданы специальные условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающимися с ограниченными возможностями здоровья.

Под специальными условиями для получения высшего образования по образовательным программам обучающимися с ограниченными возможностями здоровья понимаются условия обучения таких обучающихся, включающие в себя использование специальных образовательных программ и методов обучения и воспитания, специальных учебников, учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, проведение групповых и индивидуальных коррекционных занятий, обеспечение доступа в здания организаций и другие условия, без которых невозможно или затруднено освоение образовательных программ обучающимися с ограниченными возможностями здоровья.

В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья организацией при необходимости обеспечивается:

1) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по зрению:

наличие альтернативной версии официального сайта организации в сети "Интернет" для слабовидящих;

размещение в доступных для обучающихся, являющихся слепыми или слабовидящими, местах и в адаптированной форме (с учетом их особых потребностей) справочной информации о расписании учебных занятий (информация должна быть выполнена крупным рельефно-контрастным шрифтом (на белом или желтом фоне) и продублирована шрифтом Брайля);

присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь;

обеспечение выпуска альтернативных форматов печатных материалов (крупный шрифт или аудиофайлы);

обеспечение доступа обучающегося, являющегося слепым и использующего собаку-поводыря, к зданию организации;

2) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху:

дублирование звуковой справочной информации о расписании учебных занятий визуальной (установка мониторов с возможностью трансляции субтитров (мониторы, их размеры и количество необходимо определять с учетом размеров помещения);

обеспечение надлежащими звуковыми средствами воспроизведения информации;

3) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, материально-технические условия должны обеспечивать возмож-

ность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, столовые, туалетные и другие помещения организации, а также пребывания в указанных помещениях (наличие пандусов, поручней, расширенных дверных проемов, лифтов, локальное понижение стоек-барьеров; наличие специальных кресел и других приспособлений).

Образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья может быть организовано как совместно с другими обучающимися, так и в отдельных группах или в отдельных организациях.

При получении высшего образования по образовательным программам обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются бесплатно специальные учебники и учебные пособия, иная учебная литература, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

Негосударственное частное образовательное учреждение высшего образования «Армавирский лингвистический социальный институт», реализующее основную образовательную программу подготовки, располагает материально-технической базой, обеспечивающей проведение всех видов дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, лабораторной, практической и научно-исследовательской работы обучающихся, предусмотренных учебным планом вуза, и соответствующей действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Обеспечение учебного процесса компьютерами предусматривает наличие не менее одного компьютера на 25 обучающихся.

При использовании печатных изданий вуз обеспечивает каждого обучающегося во время самостоятельной подготовки рабочим местом в читальном зале библиотеки в соответствии с объемом изучаемых учебных дисциплин. (23а, Библиотека; 26а, Читальный зал)

При использовании электронных изданий вуз обеспечивает каждого обучающегося во время самостоятельной подготовки рабочим местом в компьютерных классах (лабораториях), читальном зале библиотеки с выходом в Интернет в соответствии с объемом изучаемых учебных дисциплин.

Обеспеченность компьютерным временем с доступом в Интернет составляет не менее 200 часов в год на одного обучающегося.

Б1.Б.05 Высшая математика	32а, Кабинет математики. Кабинет математики с методикой преподавания	комплекты тематических плакатов, учебно-методические стенды, ноутбук